

על סוגיית כושר הקליטה של הארץ והגיע למסקנות מפליגות על הצורך להגביל את העלייה היהודית לארץ – בעטייה של פגיעה קשה בפלאחים הערבים ונישולם מהקרקע³¹. בדו"ח סודי, (נספח לדו"ח הגלוי) שהועבר לשר המושבות (כעבור שנה בערך – במאי 1931), באמצעות הנציב העליון, טוען פרנטש, שממשלת המנדט טיפלה בזהירות מופלגת בבעלי זכויות ערבים והעניקה להם יתרונות בלתי סבירים, אף-על-פי שהפרו את תנאי הזיכיון, התעלמו מהחוק ולא שילמו מיסים. חובת הממשלה הייתה להפקיע מהם את זכויות הקרקע שבבעלותם ולהעמידם לחכירה, אלא שאז הייתה נאלצת הממשלה להחכירם ליהודים³².

עמדותיהם של הפקידים הזוטרים והבכירים מהמחוזות ומהמטה בירושלים – יצרו אווירה מתנכרת לפעילות הציונית. לכן המלצותיהם, שהועברו לדרגים הבכירים ביותר בממשלת המנדט (הנציב העליון, המזכיר הראשי וכו') ולמשרד המושבות בתדירות גבוהה – השפיעו, כנראה, במשך הזמן על המדיניות הבריטית כלפי היישוב היהודי ושאיפותיו הלאומיות. ניתן לראות בהמלצותיהן של ועדות החקירה בראשות הופ-סמפסון מ-1930³³ וועדת פיל מ-1937 – הוועדה המלכותית³⁴ נסיגה ניכרת מהעמדה הבריטית הפרו-ציונית, כפי שנוסחה ב"הצהרת בלפור" וב"כתב המנדט".

5. מגמות והכרעות בייצוב ועיצוב המדינות של ממשלת בריטניה בענייניה של ארץ-ישראל, מראשית השלטון הבריטי עד סוף שנות ה-30.

המינהל הבריטי בארץ היה כפוף, בראש ובראשונה, לאינטרסים הגלובליים של בריטניה. עקב זאת הוא היה חייב לפעול בהתאם להוראות משרד החוץ (עד לתחילת השלטון האזרחי) ואחר-כך – בהתאם להוראות משרד המושבות (עד לסוף שנות ה-30). ארץ-ישראל נוהלה במתכונת המשפטית והארגונית של מושבת-כתר בריטית, אף-על-פי שניתנה כמנדט לבריטניה על-פי החלטת חבר הלאומים. להתחייבותה של בריטניה לציונים על-פי "הצהרת בלפור" ו"כתב המנדט" (ראה נספח מס' 1) – לא ניתנה עדיפות ראשונה במעלה, ובודאי לא נוכח האינטרסים האימפריאליים הבריטיים³⁵.

במסגרת האינטרסים האימפריאליים הבריטיים מאז המאה ה-19 רצו הבריטים לחדור לאגן המזרחי של הים התיכון. במהלך מלחמת העולם הראשונה הגבירה בריטניה את מאמציה בכיוון זה באמצעים שונים: דיפלומטיים, כלכליים וצבאיים. יש הטוענים, שהבריטים ראו שתנועה הציונית והגשמת תכניתה בארץ-ישראל מועילות למדיניות הבריטית. הם חשבו, שהתכניות הן בנות ביצוע וצודקות כאחת, והניחו, שהגורמים הערביים העיקריים ישלימו איתן³⁶.

כבר בראשית שנות ה-20 לא ייחסו אנשי צבא בריטיים בכירים ערך אסטרטגי לארץ-ישראל וטענו, שיש לצאת ממנה בהקדם, בעיקר מפני "שבעיית ארץ-ישראל וזה לבעיית אירלנד", ובריטניה עלולה להסתבך בהשלטת סדר ושלום בין "שני עמים החיים בארץ קטנה, ובשם אהבת אלוהים שונאים זה את זה שנאה תהומית". למרות אזהרות מעין אלו – החליטה בריטניה להמשיך את מדיניותה ולקבל את המנדט על הארץ³⁷. בסוף מלחמת העולם הראשונה הייתה ממשלת בריטניה – כמעצמה עולמית – מטופלת בבעיות אימפריאליות דוחקות, והנחתה את השלטון-הצבאי במדיניותה רק בקווים כלליים, וכרגיל נטתה להסתמך על "האנשים במקום". החלל, שנוצר בקביעת המדיניות, גרם לכך שתרגומה המעשי נעשה בידי הפקידות המקומית על-פי נטיות לבה והשקפותיה³⁸.

מדיניותה של בריטניה בראשית שנות ה-20 הייתה ללא ספק פרו-ציונית: הדבר השתקף בהכללת "הצהרת בלפור" ב"כתב המנדט", ובעצם גיבושו של כתב המנדט שבסעיפיו: 2, 4, 6 ו-11 (ראה נספח מס' 1) - ניתנו יתרונות בולטים למאווייהם של הציונים.

גם מינויו של הרברט סמואל לנציב עליון ראשון הוכיח את הדבר: סמואל היה אישיות בריטית פוליטית חשובה וציוני מוצהר. בכך היה איתות מובהק לחשיבות שמייחסת הממשלה הבריטית לביצוע מדיניות פרו-ציונית.

הסכמת ממשלת בריטניה להקים את "ועד הצירים לארץ-ישראל" ולשולחו לארץ כבר לפני התהוות הממשל האזרחי - מעידה גם היא על כוונות פרו-ציוניות. "ועד הצירים" שפעל בשנים 1918-1921 הניח את היסודות למבנה המשק והכלכלה הארצישראלים והפך לשותף פעיל בתהליכי עיצוב הממשל והחברה לזמנו, ובהנחת היסודות לעתיד לבוא. כל זאת - בהסכמת ממשלת בריטניה וכחלק ממדיניותה³⁹. עם ראשית השלטון האזרחי בארץ - נוצר לחץ מסיבי על הממשלה הבריטית להפשיר "זיכיונות כלכליים" מהתקופה התורכית. עיקר הלחץ בא מחברות הנפט האמריקניות, שסברו שבסביבות ים-המלח מצויות עתודות נפט מרובות. הבריטים סירבו בכל תוקף להפשיר את הזיכיונות, מכיוון שחששו מהסתבכויות משפטיות (כל עוד לא נחתם הסכם השלום עם תורכיה) ומבעיות מדיניות עם בעלי בריתם וכדו'. בעקבות פניתם של הציונים לצ'רצ'יל, שר המושבות דאז, לשחרר זיכיונות כלכליים בארץ לטובתם - פנה האחרון למשרד החוץ וביקש להפשיר זיכיונות לציונים. בעקבות עמדתו של שר המושבות הוחלט - בתיאום עם היועץ המשפטי של משרד החוץ הבריטי - לפרסם באפריל 1921 הודעה רשמית, המאפשרת הענקת זיכיונות לציונים. במסגרת זו ניתן לפנחס רוטנברג "זיכיון החשמל"⁴⁰. היה בכך צעד פרו-ציוני מובהק, שעלה בקנה אחד עם המדיניות הבריטית לפתח את הארץ. הבריטים סברו, שההון היהודי שיזרום לארץ יעודד פיתוח וקידמה.

שר המושבות, וינסטון צ'רצ'יל, כינס את "ועידת קהיר" ב-12.3.1921. תכלית הכינוס הייתה לקבוע את מדיניותה של בריטניה בשאלה הציונית והערבית לטווח רחוק. במסגרת זו הוחלט על הפרדתו של עבר הירדן המזרחי מתחומי "הבית הלאומי". ההסדרים המדיניים, שהיו כרוכים בניתוק עבר הירדן המזרחי מהמנדט על ארץ-ישראל, חייבו שינויים בכתב המנדט. אין ספק, שהיה בצעד זה משום נסיגה בריטית מהיקף המחויבות ל"בית הלאומי", אם כי לא ממש הפרת הסכם. מכל מקום, דבר השינויים הובא לידיעת ההנהלה הציונית בלונדון, ונעשה רק לאחר קבלת הסכמתה⁴¹.

מראשית השלטון האזרחי הייתה הקפדה מצד ממשלת בריטניה על כל פעולות ממשלת המנדט. למשל, התקציב הארצישראלי עבר מדי שנה בשנה בדיקת "שתי וערב" במשרדי המושבות והאוצר, והיא הסתיימה בדרך כלל בקיצוצי תקציב, ובעיקר - בסעיפי השירותים הציבוריים⁴². בדרך כלל נטתה המדיניות הפיסקאלית של הבריטים להיות שמרנית, משמע - לא להשקיע מכספי משלם המיסים הבריטי במושבות מעבר לים. מניתוח המדיניות הכלכלית של ממשלת המנדט בשנות ה-20 עולה, שהנציב העליון הראשון, הרברט סמואל, ניהל מדיניות תקציבית נועזת, שהרחיבה את הוצאות הפיתוח. כמו-כן, במהלך כל שנות ה-20 הניחה ממשלת המנדט יסודות חשובים למשק הארצישראלי, שהטיבו בעיקר עם היישוב היהודי ומוצריו וקידמה אותו לקראת רמה אירופאית⁴³. לפי האמור לעיל, - בארץ-ישראל חרגה בריטניה מכללי התנהגותה הרגילים בעניינים הפיסקאליים ביחס לנהוג במושבות-הכתר - לטובת פיתוחו של "הבית הלאומי".

במהלך שנות ה-20 וה-30 הסתלקה ממשלת בריטניה ממדיניות ההעדפה ליסוד "הבית הלאומי", וגיבשה מדיניות "מאוזנת" יותר כלפי הערבים. יש הטוענים, שהתמורות במדיניות הבריטית נבעו מאכזבתם הקשה של הבריטים מיכולת היהודים להגשים בכוחותיהם הכלכליים, החברתיים והדמוגרפיים (עלייה יהודית) את עקרון "הבית הלאומי" שהובטח להם.⁴⁴

גם לחיים וייצמן היה ברור, שתמיכת הבריטים במפעל הציוני ובהתפתחותו, מתבססת במידה רבה על הערכתם את כוחו של המפעל הציוני ואת כוחה של התנועה הציונית. מרכיב זה היה חלק משיקוליהם המדיניים בשנות ה-20 ובראשית שנות ה-30.⁴⁵

פ"ה קיש, שהיה מ-1922 מנהל המחלקה המדינית של ההנהלה הציונית בירושלים, סבור, שממשלת בריטניה עשתה מאמצים כנים במדיניותה הן ליישום "כתב המנדט" ככתבו וכלשונו. פירושו של דבר, שהבריטים השתדלו לעזור להקים את ה"בית הלאומי" ליהודים בארץ.⁴⁶

בשאלת ההגירה של היהודים לארץ – עניין אקוטי, שעורר התנגדות עזה של התנועה הלאומית הערבית – נקבעה המדיניות הבריטית על יסוד שיקולים פוליטיים וכלכליים כאחת. עד 1939 תמכו הבריטים בהתפתחות מבוקרת של "הבית הלאומי".⁴⁷

למעשה, חופש הפעולה של הפקידות הבריטית הבכירה בממשלת המנדט – כולל הנציב-העליון עצמו – היה מוגבל מאוד. כל החלטה בעלת משקל הייתה כפופה לאישור משרד המושבות בלונדון. אפילו ל"חבר הלאומיים", שהעניק לאנגליה את המנדט על ארץ-ישראל (והיה דה-יורה "בעל העוצמה"), לא היה משקל של ממש. שר המושבות היה מוסמך לאשר או לפסול חוקים שיזם הנציב-העליון. כמו-כן, הוא היה יכול, לקצץ בסעיפי תקציב ולאשר מינויים או לבטלם. הנציב נדרש גם להתחשב באינטרסים, שיוצגו על-ידי משרדים אחרים בממשלת בריטניה. עוצמתם של שרי המושבות בקביעת המדיניות הבריטית נחלשה לעיתים עקב חילופי-גברי תדירים. במשך שלושים שנות המנדט התחלפו 17 שרי מושבות, (באותה עת שירתו בארץ שבעה ניצבים עליונים). לפיכך התרכזה עוצמה רבה בידי הפקידים הבכירים של משרד המושבות בלונדון. כללו של דבר, בעניינים בעלי משקל ואינטרס אימפריאלי של הבריטים – קבעה ממשלת בריטניה את המדיניות.⁴⁸

נציג דוגמה אופיינית להבהרת העניין:

באמצע שנות ה-20 התעניינה התנועה הציונית ברכישת "זיכיון החולה". שטח הקרקע נחשב בזמנו לעידית וכבעל פוטנציאל התיישבותי אדיר. ח' וייצמן התערב באופי פעיל ואינטנסיבי במשא ומתן לרכישת הזיכיון. לבריטים היה ברור, שלציונים יש עניין ברכישת כ-60,000 ד' של הזיכיון בעיקר משיקולים מדיניים, ולא דווקא משיקולי-התיישבות. בקונסטלציה זו – ועל רקע התנגדות הערבים – המליצו פקידים בכירים במשרד המושבות, ובראשם ג' שקבור – שעמד בראש מחלקת המזרח התיכון במשרד – לדחות את היוזמה הציונית. שר המושבות דאז ל' אמרי (Leopold Amery) תמך ביוזמה בהתאם למדיניות בריטניה על-פי סעיפים 6 ו-11 של "כתב המנדט" והורה לפקידות הבכירה בלונדון ולנציב-העליון לאפשר לתנועה הציונית לבצע את הרכישה למרות המלצותיה נגד אישור העסקה.⁴⁹ בסופו של דבר, לא יצאה הרכישה לפועל באמצע שנות ה-20, ולא באשמת המדיניות הבריטית.

6. סיכום ומסקנות

המדיניות הבריטית ביחס לארץ-ישראל נבעה בראש ובראשונה מאינטרסים אימפריאליים. האינטרס הבריטי מאז המאה ה-19 היה לחדור לאגן המזרחי של הים התיכון. בהתאם לכך דאגו הבריטים להציג את היהודים בעיקר מהיישוב הישן האשכנזי - כנתונים לחסותם במסגרת "הסכמי הקפיטולציות"⁵⁰. במהלך מלחמת העולם הראשונה עשתה הממשלה הבריטית מאמצים רבים ומורכבים להשתלט על האזור, ונקטה צעדים מדיניים וצבאיים לשם כך. בסופו של דבר קיבלה בריטניה "מנדט" על הארץ מידי "חבר הלאומיים".

עם ראשית השלטון הבריטי על הארץ הייתה המדיניות הבריטית הרשמית פרו-ציונית. הדבר בא לידי ביטוי מובהק ב"כתב המנדט", שנוסח, בעצם, על-ידי בריטניה. במאמרנו ביקשנו לבחון את התשובה על השאלה הבאה:

האם ראשית התפנית בשנות ה-20 והסוף במדיניות הבריטית בשנות ה-30 - נבעו מהשפעתה של הפקידות המנדטורית הבריטית? במילים אחרות, האם לפקידות המנדטורית היה משקל סגולי בעיצוב המדיניות הבריטית בשאלת ארץ-ישראל?

בריטניה כמעצמה אימפריאליסטית-קולוניאליסטית פיתחה במשך עשרות שנות שלטונה במושבותיה שיטת מימשל, שהסתמכה על "האדם במקום" ועל הימנעות מהתערבות בתרבות, בדת ובמסורת הפולקלוריסטית של הילידים, וגם מדיניות פיסקאלית נוקשה, שתכליתה הייתה למנוע השקעות בפיתוח המושבות על חשבון משלם המיסים הבריטים. המסורת הקולוניאליסטית הבריטית הייתה בעוכרי המפגש בין היישוב הציוני לפקידות המנדטורית. הציונים נתפסו בעיני הפקידות כמאיימים, כטורדניים וכלא-שייכים למרחב. הבריטים ציפו, שכספי הציונים שיוזרמו לארץ יפתחוה לרווחת כלל תושביה, ואילו שהציונים - בעלי "הקופה הריקה" - סברו, שהבריטים אינם משקיעים די הצורך בפיתוחה של הארץ. הסיטואציה המתוארת הייתה "כר פורה" להתנגשות בין הציונים לבין הפקידות המנדטורית.

אופיה של האדמיניסטרציה הבריטית בארץ-ישראל נקבע ביסודו על-פי המנגנון, שהורכב במהלך מלחמת העולם הראשונה, כשרובו המכריע מבוסס על קצינים ופקידים קולוניאליים, שהיו לכודים במידה רבה או מועטה ב"קסם המזרח"⁵¹. הפקידות המנדטורית הבכירה לא נטתה לסייע למדיניות הפרו-ציונית של ממשלת בריטניה, ואף יזמה פעולות, שהתסיסו את האוכלוסיה הערבית. חלק מהפקידים, שמונו מכורח נסיבות מלחמת העולם הראשונה - תוך כדי כיבוש הארץ - הוארך מינויים עם תחילת השלטון האזרחי, כדי להשיג המשכיות ויציבות שלטונית.

חלק מפקידות זו המשיך לשרת גם בשנות ה-30. ההרכב האנושי של האדמיניסטרציה הבריטית בשנות ה-20 היה מבוסס על קצינים וחיילים ממטהו של אלנבי. בכורח הנסיבות היו אלו אנשים, שניתן היה לומר על שירותיהם למאמץ הבריטי העיקרי באותה עת, כלומר הכנעה סופית של העותומנים. עליהם נוספו פקידים ערביים שחלקם שירתו באדמיניסטרציה העותומנית ואף שימשו כקצינים בצבאה. נתוני יסוד אלו לא הפכו את פקידי את האדמיניסטרציה המנדטורית לאוהדי העניין הציוני.

רוב הפקידים הבריטים שתפסו בדרך כלל תפקידי מפתח-מסגני מושלי מחוזות ומעלה - לא למדו עברית או ערבית, שפות, שהיה בהן צורך על-מנת לקשור קשר עם התושבים המקומיים. עקב זאת נוצרה בארץ מסורת של "שלטון עקיף" (Indirect Rule). במסגרת זו הועברו פקודות ממושלי המחוזות וסגניהם לפקידים מקומיים - בעיקר ערביים - עניין, שלא היווה תחליף משביע רצון למגע ישיר עם

האוכלוסיה. בנוסף, העיסוק הרב של הפקידות הבריטית עם משרדי הממשלה בלונדון במשלוח תזכירים ומשלחות – יצר מצב, שבו היו מנותקים מהנעשה בשטח⁵². בסיטואציה זו גברה השפעתם של הפקידים הערבים.

השפעתם של הפקידים הבכירים והאדמיניסטרציה המנדטורית על גיבוש המדיניות הבריטית בארץ הייתה בדרך כלל זמנית, ונתאפשרה בקונסטלציה ספציפית, כאשר הממשלה המרכזית הייתה עסוקה בעניינים חובקי-עולם. פעילות הפקידות המנדטורית, המנוגדת לקו-המנחה של המדיניות הכוללת – הופסקה בדרך כלל על-ידי שר המושבות ובכירי משרדו, והוכפפה לקו המנחה של המדיניות הבריטית בארץ.

לפיכך השפעתם העיקרית הייתה בהערמת קשיים ובהגברת הרגישות במשרדי הממשלה בלונדון לנעשה בארץ, במיוחד בכל הקשור לקונפליקט הלאומי בין היהודים לערבים.

שיקוליה של הממשלה הבריטית בקביעת המדיניות לגבי הארץ היו בעיקרם פוליטיים – מתוך ראייה אימפריאלית. במידה רבה יש לנמק את הסחף במדיניותם הפרו-ציונית של ממשלות בריטניה במערך הכוחות הגלובלי (בעיקר מאמצע שנות ה-30), בהערכתם את חולשת כוחם של הציונים לממש את רעיון ה"בית הלאומי", וברצון לצמצם למינימום אפשרי את הוצאות האוצר הבריטי – בהשקעות ובמשלוח חיילים וציוד – מחוץ לממלכה המאוחדת⁵³.

חבר הלאומים - המנדט על ארץ-ישראל

מועצת חבר הלאומים:

הואיל ומעצמות-הברית הראשיות הסכימו ביניהן, כדי להוציא אל הפועל את הוראת הסעיף 22 מספר הברית של חבר-הלאומים, להפקיד בידי בעל מנדט נבחר על-ידי המעצמות הנ"ל את השלטון על השטח של ארץ-ישראל, שהייתה שייכת לפני לקיסרות התורכית באותם הגבולות שייקבעו על-ידיהן:

והואיל ומעצמות הברית הראשיות גם הסכימו, שבעל-המנדט יהא אחראי להגשמת ההצהרה, שניתנה לראשונה ביום 2 בנובמבר 1917 על-ידי ממשלת הוד מלכותו, מלך בריטניה הגדולה, ושנתקבלה על המעצמות הנ"ל, לטובת הקמת בית לאומי לעם היהודי בארץ-ישראל, בתנאי מפורש, שלא ייעשה שום דבר, העלול לפגוע בזכויות האזרחיות והדתיות של העדות הבלתי-יהודיות הקיימות בארץ-ישראל, או בזכויות ובמעמד המדיני, שיהודים נהנים מהם בכל ארץ אחרת:

והואיל ועל-ידי כך הוכר הקשר ההיסטורי שבין העם היהודי ובין ארץ-ישראל, וכן ניתנה הכרה לנימוקים, המחייבים את הקמתו מחדש של ביתו הלאומי באותה ארץ:

לכן, באשרה את המנדט הנ"ל - מגדירה (המועצה) את תנאיו כדלהלן:

סעיף 2 - בעל המנדט יהא אחראי להעמדת הארץ בתנאים מדיניים, אדמיניסטרטיביים וכלכליים כאלה, אשר יבטיחו את הקמתו של הבית הלאומי היהודי, כפי שנקבע בפתיחה ואת ההתפתחות של מוסדות שלטון עצמי, וכמו כן לשמירת הזכויות האזרחיות הדתיות של כל תושבי ארץ-ישראל, בלי הבדל בין עם לעם ובין דת לדת.

סעיף 3 - על בעל המנדט לעודד שלטון עצמי מקומי, במידה שהנסיבות תרשינה.

סעיף 4 - סוכנות יהודית נאותה תוכר כמוסד ציבורי, שתכליתו לייעץ לממשלת ארץ-ישראל (Administration of Palestine) ולשתף פעולה אתה בכל אותם העניינים הכלכליים, החברתיים והאחרים, הנוגעים להקמת הבית הלאומי היהודי ולענייניה.

סעיף 6 - ממשלת ארץ-ישראל - בהבטיחה, שזכויותיהם ומצבם של חלקי אוכלוסיה אחרים לא ייפגעו לרעה, תקל על עלייה יהודית בתנאים נאותים, ותעודד תוך שיתוף פעולה עם הסוכנות היהודית, הנזכרת בסעיף 4, התיישבות צפופה של יהודים על הקרקע, לרבות אדמות המדינה ואדמות שוממות, שאינן דרושות למטרות ציבוריות.

סעיף 11 - ממשלת ארץ-ישראל תנקוט את כל הצעדים הדרושים כדי לשמור על ענייני הצבור בקשר לפיתוח הארץ, ובכפיפות לכל ההתחייבויות הבינלאומיות, אשר בעל-המנדט קיבל על עצמו, תהא לה סמכות מלאה להעביר לבעלות ציבורית או לפיקוח ציבורי איזה שהם מאוצרותיה הטבעיים של הארץ או איזה שהם מהעבודות הציבוריות ומהשירותים והמפעלים בעלי הערך הציבורי, הקיימים מכבר או שיקימו בה. היא תנהיג שיטת קרקעות מתאימה לצרכי הארץ, בשים לב, בין שאר הדברים, לכך שרצוי לקדם את ההתיישבות הצפופה ואת העיבוד האינטנסיבי של הקרקע.

הממשלה תוכל לבוא לידי סידור עם הסוכנות היהודית הנזכרת בסעיף 4 כדי להקים ולקיים, בתנאים הוגנים וצודקים, עבודות ציבוריות ושירותים ומפעלים בעלי תועלת ציבורית וכן לפתח את האוצרות הטבעיים של הארץ, אם הממשלה אינה עוסקת בעניינים אלה במישרין. כל סידור כזה יקבע, כי שום רווחים המתחלקים על-ידי הסוכנות הזאת, במישרין או בעקיפין לא יעלו על ריבית על ההון בשיעור המתקבל על הדעת, ובכל הרווחים הנותרים תשתמש לטובת הארץ בדרך שתאושר על-ידי הממשלה.

נספח מס' 2: ארמניסטוציה הבריטית 1920-1936

סדר"כ	יהודים		ערבים תושבי א"י				בריטים			תקופת השירות	המחלקה
	שירות צבאי	אזרחים	שירות צבאי		אזרחים	O.E.T.A (s)	שירות צבאי	אזרחים			
			תורכי	O.E.T.A							
9 8		1			2	(3)	6 5	3	1920-30 1930-36	Chief משרד המזכיר הראשי (מכירים ראשיים, סגנים ועוזרים, הנכבדים)	
29 19	1	3	2	13	3 7	(6) (1)	7 4	3 5	1920-30 1930-36	District מנהל המחוזות וטנגרים Administration	
3 3						(2)	2	1 3	1920-30 1930-36	Department of מחלקת הפיתוח Development	
47 8	1	1	3	4	3	(4)	26 2	9 6	1920-30 1930-36	Palestine משרד ושירות Police & בתי הסוהר Prison Service האצטיוואלי	
11 2	4			1		(3)	6 2		1920-30 1930-36	Department of מחלקת ההגירה Migration	
27 17	1	2 2	7	14 5		(1)	2 1	1 9	1920-30 1930-36	Department of מחלקת החינוך Education	
18 13		4 1		3	4 1	(3)	5	2 11	1920-30 1930-36	Department of מחלקת חקלאות והדיג Agriculture & Fisheries	
25 20	1	4		2	5 7	(7)	10 4	3 9	1920-30 1930-36	Department of מחלקת הקרקעות והמחקר Land & Surveys	
169 90	8	12 6	12	37 5	17 15	(29) (1)	64 18	*19 46	1920-30 1930-36	סיכום עמ' שג"ס *חלק מתפקידים האחרות היו פקידים מצריים שהובאו ארצה כבר בתקופת הבריטית.	

מקור: על-פי: "Civil Service list (1937)", Jerusalem, 1st January 1937

הערות ומראי מקומות

1. י' פרידמן, **שאלת ארץ ישראל בשנים 1914-1918**, ירושלים, מגנס, תשמ"ז, פרק שישי.
I. Friedman: The McMahon - Hussein Correspondence, Reply to A.J. Toynbee, *Journal of Contemporary History*, October 1970.
2. י' פרידמן, **שם**, פרקים שביעי ושמיני.
כריסטופר סייקס, **מבלפור עד בויק**, תל-אביב, מערכות, 1975, עמ' 37-49.
3. נ"מ גלבר, **הנצחת בלפור ותולדותיה**, ירושלים, 1939.
ליאונרד שטיין, **מסד למדינת ישראל**, תל-אביב, שוקן, 1962.
George Antonius, *The Arab Awakening*, London, 1938.
4. י' קולת, על המחקר והחוקר של תולדות היישוב והציונות, **קתורה**, 1, יד יצחק בן צבי, אלול תשל"ו, עמ' 30-31.
5. י' בן אריה וי' ברטל (עורכים), **ההיסטוריה של ארץ ישראל, שלהי התקופה העות'מאנית**, ירושלים, כתר ויד יצחק בן צבי, 1983, עמ' 316-320.
6. י' ציטרין, **תולדות זכיון החולה - פרק ביישובו של הגליל העליון**, חיבור לשם קבלת תואר דוקטור, אוניברסיטת בר-אילן, אייר תשמ"ז עמ' 66.
7. ר' מקובר, **שלטון ומינהל בארץ ישראל 1917-1925**, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תשמ"ח. עמ' 34-35.
ז' פיינברג, **ארץ ישראל בתקופת המנדט ומדינת ישראל במשפט הבינלאומי**, ירושלים, תשכ"ג.
ר' מקובר, **שם**, עמ' 41-45.
8. ב"צ דינור (עורך ראשי), **ספר תולדות ההגנה**, כרך א', חלק ב', תל-אביב, מערכות, 1973, עמ' 535-536.
N. Bentwich, *The Mandate's System*, London; 1930.
9. י' פורת וי' שביט (עורכים), **ההיסטוריה של ארץ-ישראל**, כרך ט', ירושלים, כתר ויד יצחק בן צבי, 1982, עמ' 86-88.
ב' דינור, **שם**, עמ' 540.
10. ר' מקובר, **שם**, עמ' 24-25, 28-29, 34-35, 41-45, 63-65, 73. בעמ' 63 מופיע תיאור אנשי הצבא שהועברו לשימוש המימשל והאדמיניסטרציה בארץ ישראל, וביניהם: קופאי בבנק, שחקן תאטרון, סוחר תמונות, מוקיון, שמאי קרקעות, מוזג משקאות, מנגן בעוגב, נהג, שני מנהלי בתי ספר, מיסיונר וכדו'.
ר' מקובר, **שם**, עמ' 136-139.
11. הנתונים מבוססים על ניתוח סטטיסטי הלקוח מתוך:
Great Britain, High Commissioner for Palestine, *An interim Report On Civil Administration Of Palestine During the Period 1st July 1920 - June 30th June 1921*, Appendix 2, p.25
12. הנתונים הגולמיים מובאים ע"י ר' מקובר, **שם**, עמ' 192.
13. ג' ביגר, **מושב כתר או בית לאומי**, ירושלים, יד יצחק בן צבי, 1983, עמ' 3-7.
14. ר' מקובר, **שם**, עמ' 120 ועמ' 125.
15. ת' שגב, **ימי הכלניות - ארץ ישראל בתקופת המנדט**, ירושלים, כתר, 1999, עמ' 139-140.
16. ר', מיינרצהאגן, **פרקי יומן מרחי תיכוני**, חיפה, שיקמונה, 1973. מכתב אל הלורד קרוזן מ-10.11.1919, עמ' 57-59, רישום ביומנו מ-31.12.1919 עמ' 34-63. רישום ביומנו מ-21.6.1921, עמ' 81-82.
ב"צ דינור, (ע' הערה 7) 538-539.
17. ח' לבסקי, המדיניות הפינאנסית של ועד הצירים 1921-1928, תקופת מעבר או הנחת יסודות, **קתורה**, 16, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תמוז תש"ם, 57-58.
18. ר' מקובר, **שם**, עמ' 48 (כולל הערה 151), וכן עמ' 64 (כולל הערה 268).

16. ר' מיינרצהאגן, שם, עמ' 72-75.
17. ר' מיינרצהאגן, שם, עמ' 104-105.
18. ר' מיינרצהאגן, שם, עמ' 87-88. רישום ביומנו מ-2.8.1921.
19. גנוך וייצמן: 13.12.1921.
- אירועי "נבי מוסא" התחוללו בתאריכים כ"ג-כ"ז בניסן תרפ"א (1-5.5.1921). לפי נתוני הממשלה, נהרגו במהומות 47 יהודים (רובם - ביפו, וביניהם הסופר יוסף חיים ברנר).
- דו"ח "ועדת היקפוט" פורסם באוקטובר 1921 וקבע: הסיבה למהומות שחוללו הערבים נעוצה ב"מורת רוחם של הערבים ושנאתם ליהודים, הנובעות מסיבות מדיניות וכלכליות והקשורות בהגירה היהודית ובתפיסתם את המדיניות הציונית, כפי שהם לומדים אותה מהציונים עצמם". הוועדה קבעה, שההרגשות האנטי-יהודים הם עמוקים ונפוצים בכל שכבות האוכלוסיה הערבית המוסלמית והנוצרית. הוועדה דחתה את הסברים של היהודים, שהמהומות פרצו עקב הסתה פרועה של אפנדים (בעידוד קצינים בריטים) את ההמון הערבי נטול-ההשכלה, שחששו שזכויות היתר, שהיו להם בימי המשטר העותומני, ילקחו מהם לטובת היהודים.
20. י' פורת וי' שביט (עורכים), שם, עמ' 91-92.
21. ראה נספח מספר 2, המבסס על דו"ח הנציב העליון הכולל את כל רשימת בעלי התפקידים המרכזיים באדמיניסטרציה המנדטורית, Great Britain, Government of Palestine: Civil Service List (1937), Jerusalem, 1.1.1937.
22. י' פורת וי' שביט, שם, שם.
23. ראה נספח מספר 1.
24. Richard. D. Badcock, שירת בצבא 1914-1919, נתמנה לעוזר מנהל הסגל של O.E.T.A (s) היה מזכיר הוועדה למזרח הקרוב, שפעלה בקהיר ב-1921. ב-1.4.1925 הועבר לתפקיד בכיר בנפת צפת. ראה: הערה 21 לעיל.
25. אצ"מ: KKL5/1728 ד' ירקוני (גרינברג) מראש פינה לקה"ל 23.10.1925.
26. אצ"מ: KKL5/1728 דו"ח סודי של אטינגר לקה"ל 16.11.1925.
27. מוסא נאצר 1914-1918 שירת בצבא התורכי. מונה ליועץ ע"י הבריטים ב-O.E.T.A (s) עם ראשית השלטון האזרחי מונה לקצין מחוז בשכם ואח"כ הועבר לשרת כסגן מנהל מחוז הצפון. ראה: הערה 21 לעיל.
28. י' ציטרין, (ע' הערה 6) עמ' 216-215.
29. אל-ח'אלדי, חוסיין פחרי, רופא ועסקן פוליטי מהמשפחות הוותיקות והמכובדות בירושלים. שירת כרופא בצבא העותומני. לאחר הכיבוש הבריטי היה רופא בצבאו של פייסל, ואח"כ - במחלקת הבריאות המנדטורית. היה לאומן ערבי קיצוני וחבר ב"ועד הערבי העליון" בשל פעילותו הלאומנית הוא הוגלה ע"י הבריטים לאיי סיישל. בספטמבר 1948 מונה שר הבריאות ב"ממשלת כל פלסטין" בעזה. כיהן בממשלת ירדן כשר, ואף היה ראש ממשלתה למשך תקופה קצרה.
30. י' וייץ (עורך), יוסף נחמני - איש הגליל, רמת-גן, מסדה, תשכ"ט, עמ' 81-82.
31. Palestine, Report on Agricultural Development and Land Settlement in Palestine, by Lewis French, Director of Development, December 1931.
32. גנוך המדינה (להלן - ג"מ) PRO.C.O 733/220/97144 מהנציב העליון - למשרד המושבות, 1.5.1931.
33. Great Britain, C.O. Palestine, Report on Immigration, Land Settlement and Development, by John Hope Simpson, (London 1930, Comd 3686).
34. Great Britain, C.O. Palestine, Royal Commission Report; (London 1937, Comd 5479)
35. נ' גרוס, המדיניות הכלכלית של הממשל המנדטורי בארץ ישראל, קתורה, 24, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תמוז תשמ"ב, עמ' 153-180.
36. ב"צ דינור, (הערה 7 לעיל), עמ' 469-473, 536-537.
- י' פרידמן, שם, פרק 17.
37. תום שגב, (הערה 13 לעיל) עמ' 123-124.

38. ב"צ דינור, שם, עמ' 540.
39. ח' לבסקי, (הערה 18 לעיל) עמ' 57.
- ראה דיון לעיל בסעיף מס' 3.
40. י" ציטרין, שם, (הערה 6 לעיל) עמ' 68-70.
41. י" גיל-הר, הפרדת עבר הירדן המזרחי מארץ ישראל, **קתורה**, 12, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תמוז תשל"ט, עמ' 69-47.
42. PRO. C.O. 733/1/10319-1921.
43. נ' גרוס, המדיניות התקציבית של ממשלת ארץ-ישראל בשנות ה-20 והשפעתה על התפתחות המשק היהודי, **קתורה**, 16, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תמוז תש"ס. עמ' 74-78.
44. פ' עופר, אכזבה מהשגי הבית הלאומי היהודי גורם לתפנית במדיניות הבריטית בארץ ישראל ב-1930, **קתורה**, 16, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תמוז תש"ס, עמ' 125-132.
45. ח' וייצמן, **דברים-נאומים, מאמרים, כתבים**, ג', תל-אביב, תרצ"ז, עמ' 390.
46. נ' בנטוויץ' ומ' קיש, **בריגוד קיש - חייל וציוני**, תל-אביב, מערכות, 1978, עמ' 112-113.
47. ג' שפר, שיקולים פוליטיים בקביעת מדיניות בריטניה בשאלת הגירת יהודים לארץ ישראל, **הציונות, ה'**, תשל"ח. עמ' 182-226.
48. ת' שגב, (הערה 13 לעיל) עמ' 135-136.
49. ג"מ PRO.C.O 733/110/5238/604. תזכירים של ג' שקברו ואמרי, מהתאריכים 9.12.1925-23.11.1925.
50. ב"צ גת, **היישוב היהודי בארץ ישראל 1881-1840**, ירושלים, יד יצחק בן צבי, תשל"ד, פרק שלישי.
51. י" נדבה, לדמותו של הפקיד הקולוניאלי הבריטי בארץ-ישראל, **כיוונים**, 21, נובמבר 1983, עמ' 111-120.
52. J. Marlowe, *Rebellion in Palestine*, London, 1946. p. 113.
53. דיון: ההחלטה על יציאת הבריטים מארץ ישראל, **קתורה**, 51, ירושלים, יד יצחק בן צבי, ניסן תש"ס, עמ' 140-193.
- ג' שפר (ראה הערה 47), שם, שם.

פתרון בעיות בהנדסת המישור על-ידי שימוש בטרנספורמציות

הקדמה

הגיאומטריה לפי ההגדרה של המתמטיקאי הרמני קליין, היא "מדע החוקר תכונות של צורות, שאינן משתנות בטרנספורמציות של מישור (מרחב)". השימוש בטרנספורמציות שונות, יסודיות ובין מורכבות – מאפשר, במקרים רבים, פתרון פשוט יותר של בעיות בהנדסת מישור¹⁻⁴.

בלימודי ההנדסה של חטיבת-הביניים והחטיבה העליונה – נעשה שימוש בבנייה של קווי-עזר ואף בבניות חלופיות פשוטות, אך כמעט ללא נעשה שימוש בטרנספורמציות – הזוה, שיקוף ביחס לישר או לנקודה, סיבוב, הומותסיה (מושג, המוזכר רק במסגרת לימודי הנדסה מתקדמים). פתרון בעיות, אפילו פשוטות, על-ידי שימוש בטרנספורמציות – מפתח את הראייה ההנדסית, מקנה כלים חלופיים ומדגים כיצד ניתן לבצע התמרה של צורה גיאומטרית. ביצוע הטרנספורמציות מחזק את התפיסה, שצורה גיאומטרית איננה משהו "קפוא", אלא דבר שאפשר להניע.

בשלב הראשון אפשר להשתמש במשולשים חומריים, או בצורות גיאומטריות אחרות, כדי להדגים תכונה גיאומטרית זו או אחרת.

דגמים, קיפולי נייר וכד' הם תמצית מהותה של הגיאומטריה היסודית בשלבה הנסיוני. לעיתים קרובות דווקא השלב הנסיוני הוא זה המוביל אותנו אל ההוכחה המתמטית המדויקת. במהלך התנועה ניתן להדגיש, לצורך הבנה, אפיונים חשובים של הפעולה – תוך התייחסות לתכונות המיוחדות של הצורה.

במאמר מוצג מכלול מקיף של 38 בעיות. בכל תת-נושא הוגדר סוג הטרנספורמציה בצירוף התכונות המרכזיות שלה.

הרוב המכריע של המשימות הן בעיות בנייה, שפתרוןן מבוסס על ביצוע טרנספורמציות מסוגים שונים. לבעיות הבנייה הובאו בדרך כלל ניתוח, תיאור, הוכחה וחקירה לגבי התנאים לקבלת פתרון וקביעת מספר הפתרונות האפשריים. בעיות חישוב ובעיות הוכחה – כלולות אף הן במכלול המוגש. ראוי לציין, שפעולות הטרנספורמציה מבוססות על בניות יסודיות המוכרות לתלמידים, כגון העתקת קטע או זווית והעברת קו מקביל. לכן הטכניקה המעשית לא הובאה בתיאור הבנייה. חלק מהבעיות ניתנו לעבודה עצמית ולהתנסות.

הגישה המיוחדת לפתרון המשימות, כפי שמוצגת במאמר זה, מיועדת להקנות ולהטמיע כלים נוספים, המאפשרים התמודדות עם אתגרים מתמטיים, לעיתים בצורה פשוטה בהשוואה לשיטות שימושיות

תאריכים: טרנספורמציות, הזוה, שיקוף, סיבוב, הומותסיה, בניות חלופיות.

ומקובלות.

הטרנספורמציה היא פונקציה, שמעבירה צורה אחת לאחרת, ובכך היא מהווה גשר בין אלגברה להנדסה. באותם הרעיונות משתמשים בבניית גרפים של פונקציות שונות ובתחומי מדע אחרים.

הגדרה והצגת מושגים

הגדרה 1 – טרנספורמציה (העברה)

טרנספורמציה של מישור היא פונקציה חד-חד ערכית, שמתאימה לכל נקודה A של המישור את התמונה שלה A' (image). הנקודה A נקראת המקור של A' לפי הטרנספורמציה. אם F היא צורה כלשהי במישור, אזי אוסף הנקודות שלה לאחר ביצוע טרנספורמציה מסוימת יוצר את הצורה F' . במילים אחרות: F' מתאימה ל- F בהתאם לטרנספורמציה.

הגדרה 2 – טרנספורמציה איזומטרית

טרנספורמציה איזומטרית או בקיצור איזומטריה היא טרנספורמציה, השומרת על מרחקים. המשמעות היא, שאם A ו- B הן נקודות במישור ו- A' , B' הן התמונות שלהן בהתאמה, אז אורך הקטע $A'B'$ שווה לאורך הקטע AB .

הזווה, שיקוף ביחס לישר, סיבוב, שיקוף ביחס לנקודה הם סוגים שונים של איזומטריות יסודיות. הוכח, כי כל טרנספורמציה של מישור ניתנת לבטא כהרכבה של טרנספורמציות יסודיות.

הגדרה 3 – הומומטיה

הומומטיה היא טרנספורמציה המתייחסת למרכז O ומתאימה לכל נקודה X נקודה X' על הישר OX ולכן $OX' = k \cdot OX$. כאשר k נקרא מקדם הדמיון. גם ההומומטיה היא טרנספורמציה יסודית, אך איננה איזומטרית מישום שאינה שומרת על מרחק קבוע בין הנקודות. לאורך המאמר משולבות הגדרות לכל טרנספורמציה יסודית ומצוינות תכונות יסודיות שלהן ללא הוכחה.

הגדרות ותכונות של טרנספורמציות איזומטריות ניתן למצוא במקור³.

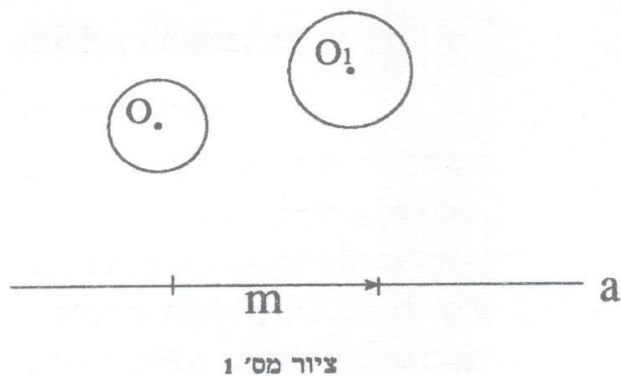
1. **הגדרת הזווה:** הזווה היא טרנספורמציה, המזיזה את כל אחת מנקודות המישור בכיוון קבוע ולמרחק קבוע.

תכונות של הזווה:

- הזווה מעבירה קטע נתון לקטע מקביל ושווה לו (או לקטע שווה לו, הנמצא על אותו ישר).
- הזווה מעבירה מעגל למעגל שווה (וכל צורה גיאומטרית – לצורה גיאומטרית חופפת).
- הזווה מעבירה ישר לישר מקביל או מתלכד.

בעיה 1.1

נתונים שני מעגלים שמרכזיהם O ו- O_1 ורדיוסיהם R ו- R_1 (מכאן ואילך נסמן מעגלים בצורה: (O, R) ו- (O_1, R_1)) וקטע m על ישר a – כנראה בציר מס' 1.



יש לבנות קטע XY , השווה ומקביל ל- m , כשקצותיו נמצאים על המעגלים.

הערה: כל בעית בנייה מורכבת מארבעה שלבים:

- ניתוח הבעיה
 - תיאור הבנייה
 - הוכחת הבנייה
 - חקירת הבנייה, לגבי מספר הפתרונות.
- בבעיות פשוטות אפשר לדלג על חלק מהשלבים.

תיאור הבנייה:

נניח את המעגל (O, R) בווקטור \vec{m} .

נסמן ב- Y את אחת מנקודות החיתוך של המעגלים

(O_1, R_1) ו- (O_2, R)

וב- X את מקורה בהזזה.

קל להראות, כי הקטע XY הנראה בציור מס' 2

הוא הקטע המבוקש.

אפשר גם לבצע את הבנייה על-ידי הזזה של המעגל

(O_1, R_1) בווקטור $-\vec{m}$.

חקירה:

במקרה הפרטי כש- $R_1 = R$ וגם $\overline{OO_1} = \vec{m}$, ישנם אינסוף פתרונות לבעיה. במקרה כללי יש לבעיה לכל היותר ארבעה פתרונות.

מקרה של ארבעה פתרונות נראה בציור מס' 3.

מזיזים את המעגל (O, R) בווקטור \vec{m} ומקבלים

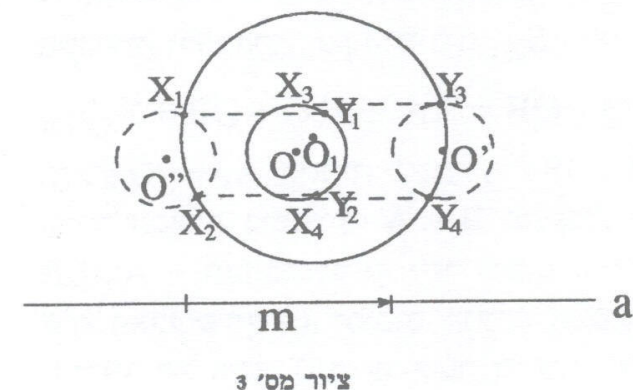
את המעגל (O', R) , החותך את המעגל (O_1, R_1)

בשתי נקודות. כאשר מזיזים את המעגל (O, R)

בווקטור \vec{m} - מקבלים את המעגל (O'', R) , החותך

את המעגל (O_1, R_1) בנקודות X_3Y_3, X_2Y_2, X_1Y_1

ו- X_4Y_4 - הם הקטעים המבוקשים.

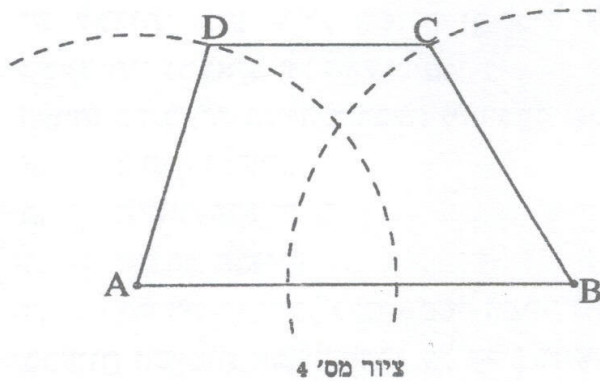


בעיה 1.2

לבנות טרפז על-סמך 4 צלעות נתונות.

ניתוח הבעיה:

נניח, שהטרפז כבר בנוי. נבנה 2 מעגלים (A, AD) ו- (B, BC) , כנראה בציור מס' 4. נותר לבנות את הבסיס העליון DC , שקצותיו על המעגלים והוא מקביל לבסיס AB .



קיבלנו, למעשה, את הבעיה 1.1

תיאור הבנייה:

בונים קטע AB, השווה לבסיס הגדול של הטרפז. בונים 2 מעגלים, שמרכזיהם A ו-B ורדיוסיהם שווים לשוקיים המתאימות. בונים קטע מקביל ל-AB, השווה לבסיס הקטן של הטרפז כמתואר בבעיה 1.1.

חקירה:

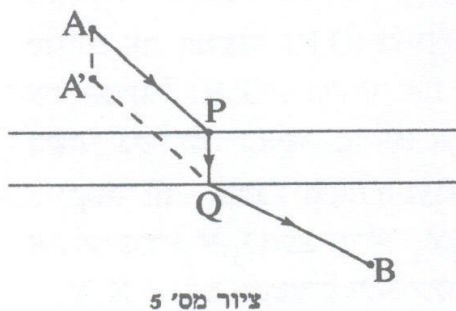
אם $AD+DC+CB > AB$, מתקבל פתרון יחיד (קיים גם טרפז שיקופי, החופף לטרפז הבנוי, שלמעשה הוא אותו פתרון).

בעיה 1.3

יישובים A ו-B נמצאים משני צידיה של תעלה מים בעלת שפות מקבילות. היכן צריכים לבנות גשר XY כדי שהדרך מ-A ל-B תהיה הקצרה ביותר? הבעיה ידועה והפתרון המקובל מבוסס על עקרון השיקוף, אך ראוי להביא פתרון גם על-ידי הזזה.

ניתוח הבעיה:

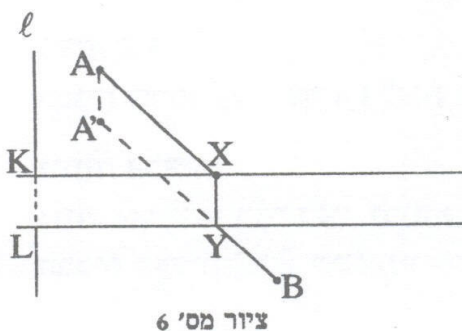
נניח כי APQB היא דרך כלשהי – כנראה בציור מס' 5. נזיז את הקטע AP למרחק PQ בכיוון תעלת המים, וכך נקבל את הקטע A'Q. המרובע APQA' הוא מקבילית ולכן הדרך בין הישובים S_{AB} היא: S_{APQB} כדלקמן,



$$S_{APQB} = AP + PQ + QB = AA' + A'Q + QB = S_{AA'QB}$$
 הקטע $AA' = PQ$, הוא גודל קבוע, השווה לרוחב תעלת המים. הדרך הקצרה ביותר מ-A' ל-B תתקבל, כאשר הנקודות: A', Q, B – תהיינה על קו ישר (סכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית). לסיכום, הנקודה המבוקשת Y היא נקודת החיתוך של הישר A'B עם שפת התעלה הקרובה ליישוב B.

תיאור הבנייה:

נבנה ישר ℓ המאונך לשפות התעלה – כנראה בציור מס' 6. נסמן ב-KL את הקטע של ℓ בין שפות התעלה. נזיז את נקודה A מרחק KL לכיוון שפת התעלה. מתקבלת נקודה A' שהיא התמונה של A. נחבר את הנקודה A עם הנקודה B. נסמן ב-Y את נקודת החיתוך של A'B עם שפת התעלה הקרובה ליישוב B.

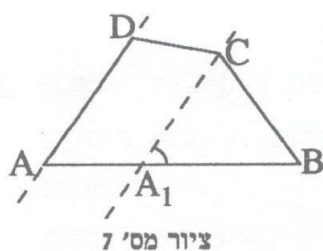


מהנקודה Y נוריד אנך לשפת התעלה השנייה, ונקבל את נקודת X.
 XY הוא הגשר המבוקש.
 ההוכחה שהפתרון יחיד – פשוטה לקורא.

1.4 בעיה

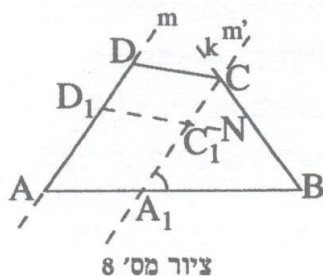
לבנות מרובע ABCD, כשנתונות זוויותיו והצלעות הנגדיות AB ו-CD.

ניתוח הבעיה:



נניח, כי הבעיה פתורה – כנראה בציור מס' 7. נזיז את הישר AD בכיוון הווקטור \overrightarrow{DC} למרחק DC. התמונה של ישר AD הוא ישר המקביל לו ועובר דרך הקודקוד C. ישר התמונה חותך את הצלע AB בנקודה A_1 . מניתוח זה נובעת הבנייה.

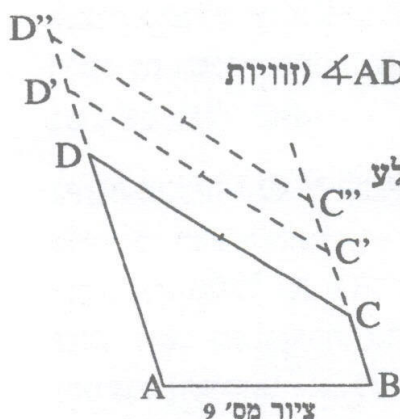
תיאור הבנייה:



בונים קטע AB, ובקצותיו בונים את הזוויות A ו-B. מתקבלות הקרניים m ו-k כנראה בציור מס' 8. על הקרן m יש למצוא את הנקודה D. משום ש- $\angle ADC$ ואורך הצלע DC נתונים, הרי לשם המשך הבנייה נבחר על הקרן m נקודה כלשהי D_1 ונבנה זווית $\angle AD_1N$ השווה לזווית $\angle ADC$.

נזיז את הישר m למרחק DC בכיוון הווקטור $\overrightarrow{D_1N}$. ישר התמונה m' של הישר m חותך את הקרן k בנקודה C. נותר להעביר ישר DC מקביל לישר D_1N , ומתקבל המרובע המבוקש.

הוכחה:



הצלע AB והזוויות שבקצותיה הן לפי הנתון. לפי הבנייה $\angle ADC = \angle AD_1C_1$ (זוויות מתאימות בין המקבילים DC ו- D_1N והחותך m). כלומר, הצורה DCC_1D_1 היא מקבילית. לכן גם הצלע DC היא הצלע המבוקשת.

חקירה:

הזווית C מיותרת, משום שסכום הזוויות במרובע הוא 360° . אם $\angle A + \angle B \neq 180^\circ$, אז יש לבעיה פתרון יחיד.

אם $\angle A + \angle B = 180^\circ$, הצלעות AD ו-BC מקבילות והפתרון תלוי באורך של CD: אם האורך של CD קטן מהמרחק שבין שתי הצלעות אז אין פתרון, ואם האורך של CD גדול מהמרחק שבין הצלעות, אז יש אינסוף פתרונות, שהם טרפזים כנראה בציור מס' 9.

חקירה:

לבעיה מספר פתרונות אפשריים: 1,0 או 2 תלוי במספר נקודות החיתוך של המעגלים (O_1, R_1) ו- (O_2, R) .

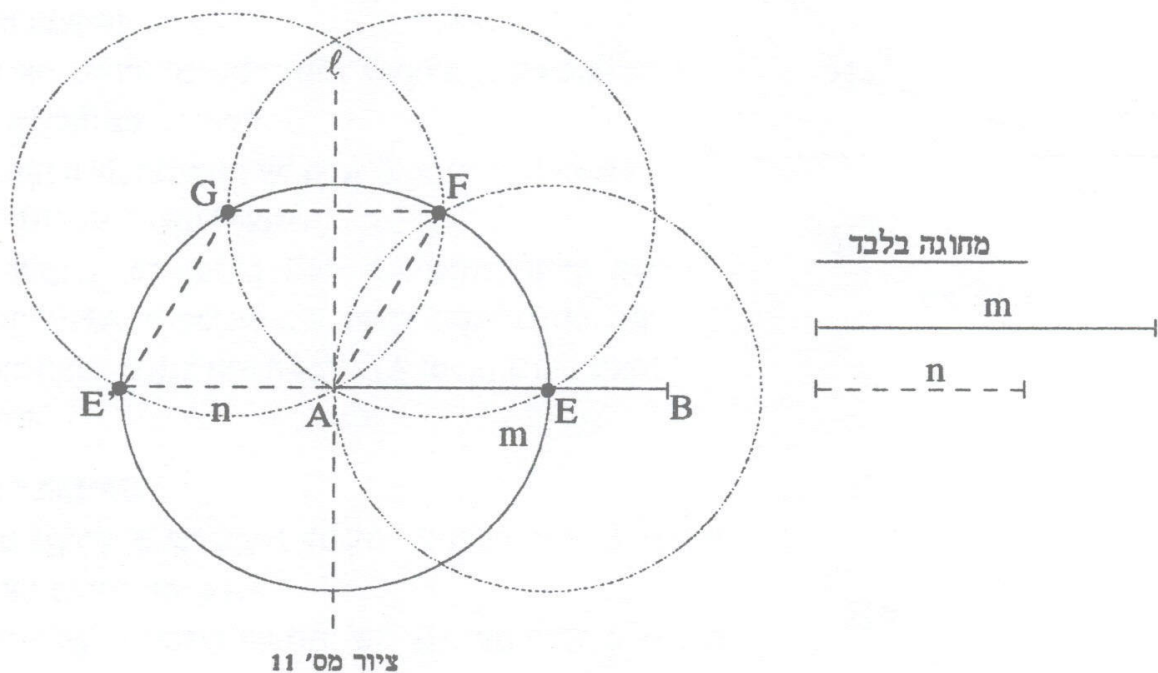
2.2 בעיה

נתונים קטעים שאורכיהם m ו- n . יש לבנות את הקטע $m+n$ בעזרת מחוגה בלבד.

ניתוח הבעיה ותיאור בנייה:

נניח שהקטע $m > n$. נסמן את הקטע m ב- AB .

אם נחוג את המעגל (A, n) , הוא יחתוך את הקטע AB בנקודה E – כנראה בציר מס' 11. מחפשים את הנקודה E' שהיא הנקודה השיקופית לנקודה E ביחס לישר ℓ המאונך לישר AB ועובר דרך A . מהנקודה E חגים מעגל (E, n) החותך את המעגל (A, n) בנקודה F . מהנקודה F חגים מעגל (F, n) החותך את המעגל (A, n) בנקודה G . מהנקודה G חגים מעגל (G, n) החותך את המעגל (A, n) בנקודה E' . אורך הקטע $BE' = m+n$, מ.ש.ל.



ההוכחה מבוססת על העובדה, שהמרובע $E'GFA$ הוא מעוין בעל צלע n וזווית חדה של 60° .

2.3 בעיה (בעיה חישוב)

במשולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) אורך התיכון לניצב הקטן שווה ל- m . התיכון יוצר זווית של 15° עם הניצב הגדול. להביע את שטח המשולש באמצעות m .

פתרון:

נבנה נקודה K שיקופית לנקודה M ביחס לישר AC - כנראה בציר מס' 12.

ברור מהבנייה, ש- $\Delta KAC \cong \Delta MAC$

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta AMC} = S_{\Delta KAM} = \frac{1}{2} AM \cdot AK \sin 30^\circ = \frac{1}{2} m^2 \sin 30^\circ = \frac{m^2}{4}$$

מ.ש.ל.

בעיה 2.4

נתון ישר ℓ ושתי נקודות A ו-B באותו הצד של הישר. למצוא על הישר ℓ נקודה M באופן שסכום הקטעים AM+MB יהיה הקטן ביותר.

בעיה זו ידועה מאוד, בדרך כלל בשם "הפרה והרפת" ^{1,6} נביא את פתרונה כבסיס לפיתרון הבעיה הבאה.

ניתוח הבעיה:

נבנה את נקודה B' השיקופית לנקודה B ביחס לישר ℓ - כנראה בציר מס' 13.

לכל נקודה N, הנמצאת על הישר ℓ מתקיים $NB = NB'$, ולכן $AN + NB = AN + NB'$.

זאת אומרת, כי הסכום $AN + NB$ שווה לאורך הקו השבור ANB' ומעונינים בקו השבור הקצר ביותר. הקו השבור הקצר ביותר הוא הקטע AB' ומכאן נובע תיאור הבנייה.

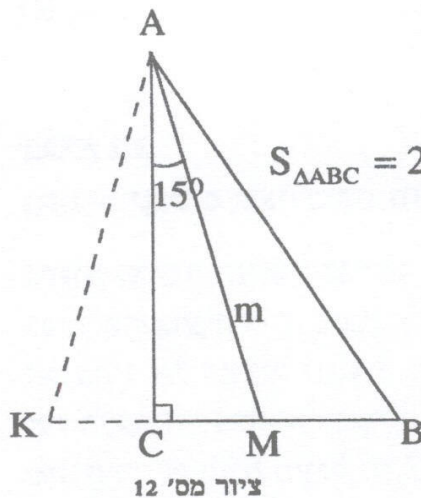
תיאור הבנייה:

בונים נקודה B' שיקופית לנקודה B ביחס לישר ℓ - כפי שנראה בציר מס' 14.

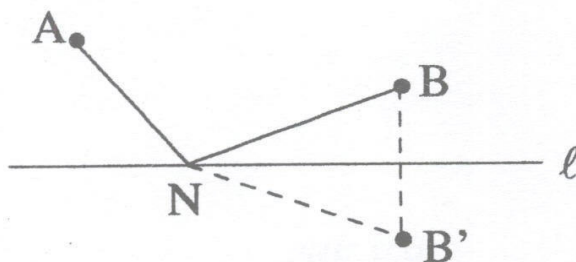
הנקודה M - נקודת החיתוך של AB' עם הישר ℓ - היא הנקודה המבוקשת. ושוב ההוכחה מסתמכת על המשפט, שסכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית.

הערה

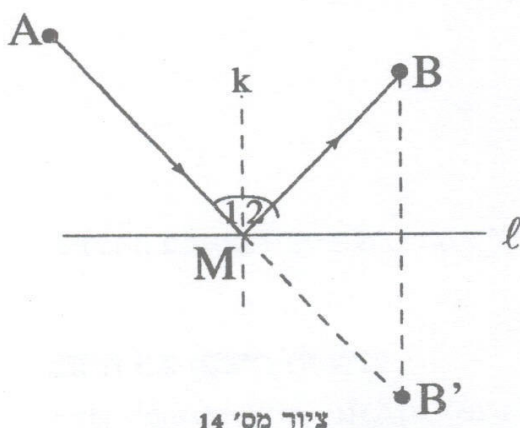
מפתרון הבעיה קל להוכיח ש- $\angle M_1 = \angle M_2$ (k ישר הניצב לישר ℓ בנקודה M). זאת אומרת, שאת הדרך הקצרה ביותר מאפיין, שזווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה וזה עקרון פרמה לגבי ההתנהגות של קרן אור, הנעה תמיד בדרך הקצרה ביותר.



ציור מס' 12



ציור מס' 13

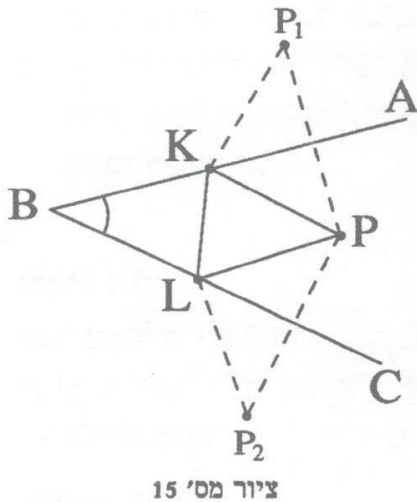


ציור מס' 14

בעיה 2.5

נתונה זווית חדה ABC ובתוכה נקודה P . למצוא על שוקי הזווית BA ו- BC נקודות M ו- N בהתאמה, באופן שהיקף המשולש MPN יהיה הקטן ביותר.

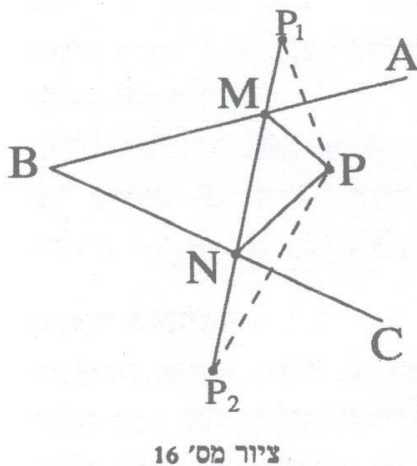
ניתוח הבעיה:



הנקודה P_1 תהיה נקודה שיקופית לנקודה P ביחס לישר BA . הנקודה P_2 שיקופית לנקודה P ביחס לישר BC (ציור מס' 15) על סמך תכונת השיקופיות ניתן בקלות להראות, כי לכל שתי נקודות K ו- L על שוקי הזווית היקף המשולש KPL
 $KP + KL + LP = KP_1 + KL + LP_2$
 זאת אומרת, שהיקף המשולש שווה לאורך הקו השבור $P_1 K L P_2$. כדי שהיקף יהיה הקטן ביותר, הקו השבור חייב להפוך לקטע ישר, ומכאן נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:

נבנה את הנקודות P_1 ו- P_2 - כמתואר בניתוח הבעיה. נחבר את הנקודות P_1 ו- P_2 . נקודות החיתוך של הקטע $P_1 P_2$ עם שוקי הזווית הן הנקודות המבוקשות (ציור מס' 16). ההוכחה והחקירה פשוטות. לבעיה יש תמיד פתרון יחיד.



משימות לפתרון עצמי

בעיה 2.6

נתון ישר MN ונקודות A ו- B משני צידיו. יש להעביר דרך הנקודות A ו- B שתי קרניים, הנחתכות בנקודה אחת על הישר MN באופן שהישר חוצה את הזווית שביניהן.

בעיה 2.7

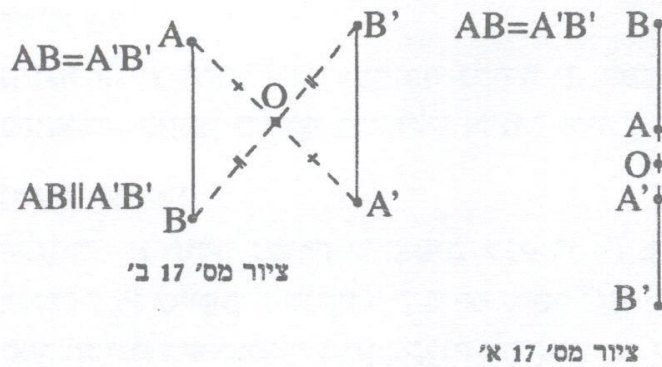
לבנות ריבוע באופן שאלכסון נמצא על ישר נתון ושני קצות אלכסונו השני נמצאים על ישר נוסף נתון ומעגל נתון בהתאמה.

3. הגדרת שיקוף ביחס לנקודה (מרכז השיקוף)

נקודות A ו- A' נקראות שיקופיות ביחס לנקודה O , אם הנקודה O חוצה את הקטע AA' .

תכונות של שיקוף ביחס לנקודה

א. פעולת השיקוף מעבירה קטע לקטע מקביל (או לקטע, הנמצא על אותו ישר, אם מרכז השיקוף



נמצא על ישר המכיל את הקטע).
 בציורים 17 א' ו 17 ב' מוצגת הדגמה של
 שיקוף קטע AB ביחס לנקודה.
 ב. שיקוף מעביר מעגל למעגל חופף.
 ג. שיקוף מעביר ישר לישר מקביל או מתלכד
 (ישר מתלכד מתקבל, כשהישר עובר דרך
 מרכז השיקוף).

בעיה 3.1

שני מעגלים (O, R) ו- (O_1, R_1) נחתכים בנקודה M.
 להעביר ישר דרך הנקודה M באופן שיחתוך את
 המעגלים בנקודות A ו-B מדרך ש- $AM=MB$.

ניתוח הבעיה:

בנייה, כי הבעיה פתורה - כנראה בציור מס' 18.
 בונים מעגל (O_2, R_2) השיקופי למעגל (O_1, R_1)
 ביחס לנקודה M.
 בגלל השיוויון $AM=MB$, נקודה A היא התמונה
 של נקודה B, והיא נקודת החיתוך של המעגלים
 (O, R) ו- (O_2, R_2) . מכאן נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:

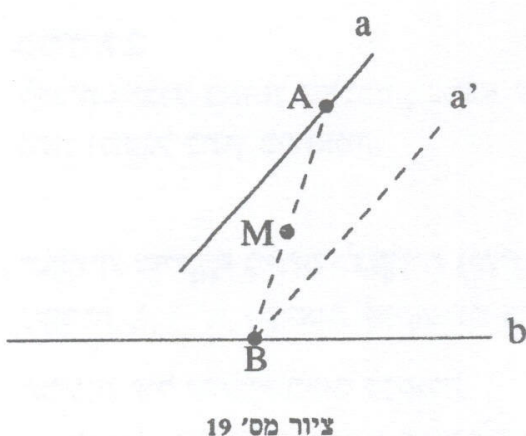
בפעולת שיקוף בונים את המעגל (O_2, R_2) שיקופי למעגל (O_1, R_1) ביחס לנקודה M.
 נסמן ב-A את נקודת החיתוך של המעגלים (O, R) ו- (O_2, R_2) . נקודה B היא נקודת החיתוך של
 הישר AM עם המעגל (O_1, R_1) .
 לבעיה יש פתרון אחד ויחיד אם המעגלים הנתונים נחתכים בשתי נקודות ואין שום פתרון, אם
 המעגלים משיקים בנקודה M ורדיוסם לא שווה, ויש
 אינסוף פתרונות אם מעגלים משיקים ושווים (ההוכחה
 ניתנת לעבודה עצמית).

בעיה 3.2

לבנות קטע AB שקצותיו יהיו על שני ישרים נתונים a
 ו-b באופן שהקטע חצה בנקודה נתונה M.

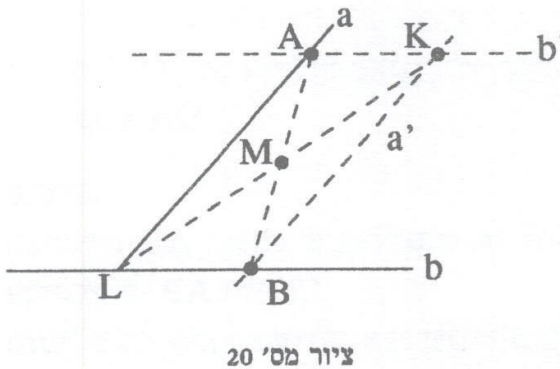
תיאור הבנייה:

בונים ישר a' שיקופי לישר a ביחס לנקודה M. נסמן ב-



B את נקודת החיתוך של הישרים a' ו- b . המקור של נקודה B בשיקוף הוא נקודת החיתוך של הישר MB עם הישר a , וזאת היא הנקודה A המבוקשת (ציור מס' 19).

הוכחה:



ציור מס' 20

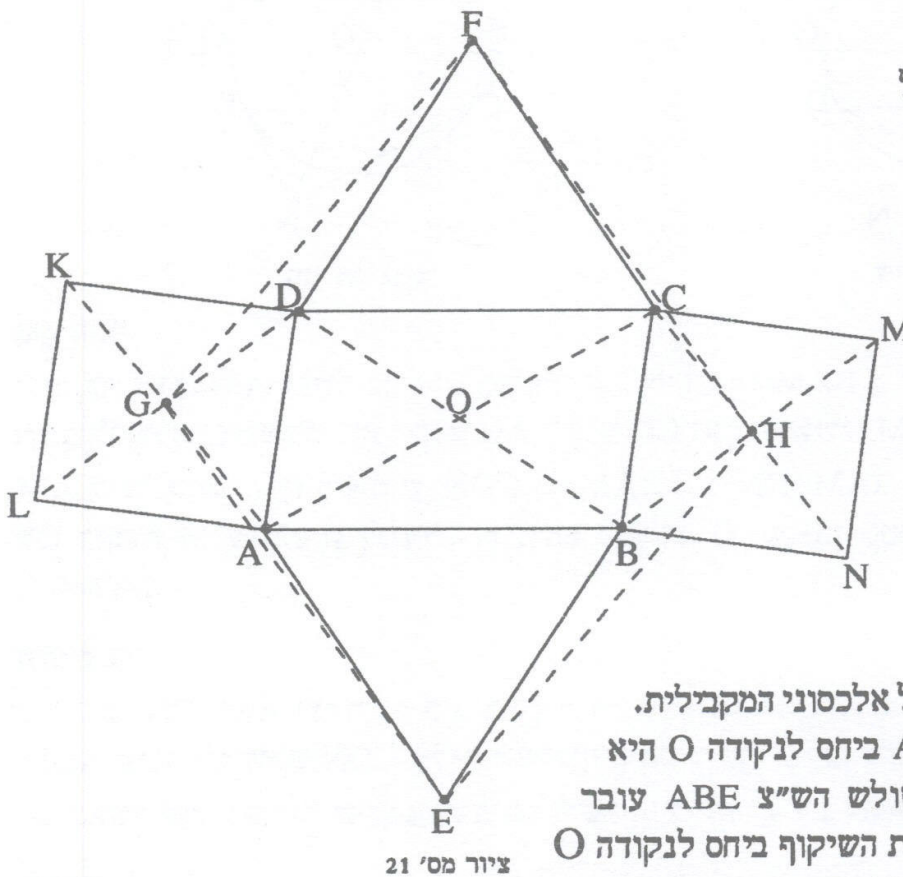
אם נבנה את הישרים a' ו- b' השיקופיים ביחס לנקודה M לישרים a ו- b בהתאמה, נקבל מקבילית AKBL (ציור מס' 20). הנקודה M היא נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית ולכן היא חוצה את הקטע AB. מ.ש.ל.

חקירה:

יש לבעיה פתרון יחיד כאשר a ו- b ישרים נחתכים. אם הישרים מקבילים והנקודה M נמצאת במרחקים שווים מהם, אז יש אינסוף פתרונות, אם הישרים מקבילים, אך הנקודה M נמצאת במרחקים שונים מהישרים, אזי אין שום פתרון.

בעיה 3.3 (בעיה הוכחה)

נתונה מקבילית ABCD. על שתי צלעותיה הנגדיות AB ו-CD בונים משולשים ש"צ חיצוניים: ABE ו-CDF, ועל שתי הצלעות הנגדיות האחרות בונים ריבועים חיצוניים שמרכזיהם G ו-H. להוכיח שהצורה המתקבלת EGFH היא מקבילית. תיאור הנתונים מופיע בציור מס' 21.



ציור מס' 21

פתרון:

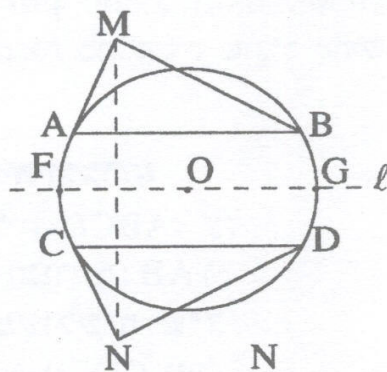
נסמן ב-O את נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית. בפעולת השיקוף של הצלע AB ביחס לנקודה O היא עוברת לצלע CD. כנ"ל המשולש הש"צ ABE עובר למשולש הש"צ CDF, לכן פעולת השיקוף ביחס לנקודה O מעבירה את נקודה E לנקודה F. בדרך דומה מוכיחים כי מרכזי הריבועים G ו-H שיקופיים זה לזה ביחס לנקודה O. מכאן נובע, שאלכסוני המרובע EGFN חוצים זה את זה בנקודה O. לכן המרובע הוא מקבילית. מ.ש.ל.

בעיה 3.4

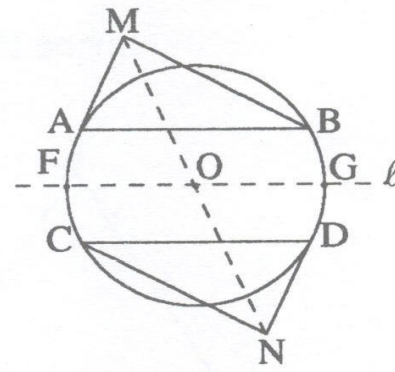
נתונים AB ו- CD , שני מיתרים שווים ומקבילים במעגל (O, R) . על מיתרים אלו בנויים שני משולשים חופפים: ABM ו- CDN באופן שהנקודות O ו- M נמצאות מצדיו השונים של הישר AB וגם נקודות O ו- N נמצאות מצדיו השונים של הישר CD . להוכיח, כי הישר MN או מאונך למיתרים AB ו- CD או עובר דרך נקודה O , וכן שהנקודה O חוצה את הקטע MN .

פתרון:

המיתרים AB ו- CD שיקופיים ביחס לנקודה O וגם ביחס לקוטר המעגל FG המונח על הישר ℓ המקביל ל- AB ול- CD . נטפל בשני מקרים שונים כפי שנראים בציורים 22 א', 22 ב'.



ציור מס' 22 ב'



ציור מס' 22 א'

מקרה א'

נניח כי $AM=DN$ (ציור 22 א'). במקרה זה, $\angle BAM = \angle CDN$ וכן $\angle ABM = \angle DCN$. שיקוף ביחס לנקודה O מעביר את הקטע AB לקטע CD ואת המשולש ABM עובר למשולש DCN (ישר AM עובר לישר DN משום ש- $\angle BAM = \angle CDN$ ו- $AM=DN$). לכן נקודה M שיקופית לנקודה N ביחס לנקודה O . על-כן קטע MN עובר דרך נקודה O ו- $MO=ON$.

מקרה ב'

נניח, כי $AM=CN$ (ציור 22 ב'). במקרה זה $\angle BAM = \angle DCN$ ו- $\angle ABM = \angle CDN$. המשולש ABM עובר למשולש CDN על-ידי שיקוף ביחס לישר ℓ . לכן נקודות M ו- N שיקופיות ביחס ל- ℓ . כאשר שתי נקודות שיקופיות ביחס לישר חייב להיות $MN \perp \ell$, זאת אומרת $MN \perp AB$ מ.ש.ל.

הערה:

כדי שבבעיה הנ"ל יתקיימו שני התנאים יחד, דהיינו נקודה O חוצה את הקטע MN וגם $MN \perp AB$, חייב להתקיים: $AM=BM=CN=DN$, זאת אומרת, שדבר מחייב שמשולשים ABM ו- CDN יהיו שווי-שוקיים.

בעיות למתרון עצמי

בעיה 3.5

לבנות קטע AB כך שקצה A יהיה על ישר נתון, קצה B יהיה על מעגל נתון ונקודה נתונה Q תחצה את הקטע.

3.6 בעיה

מרובע ABCD הוא מקבילית. O_1 ו- O_2 הם מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABC ו-ADC בהתאמה. להוכיח כי שלושת הקטעים: AC, BD ו- $O_1 O_2$ נחתכים בנקודה אחת.

3.7 בעיה

מרובע ABCD הוא מקבילית. P ו-Q הם המרכזי המעגלים, החוסמים את המשולשים ABC ו-ADC - בהתאמה. להוכיח, כי $PB \parallel QD$ וגם $PD \parallel QB$.

4. הגדרת סיבוב

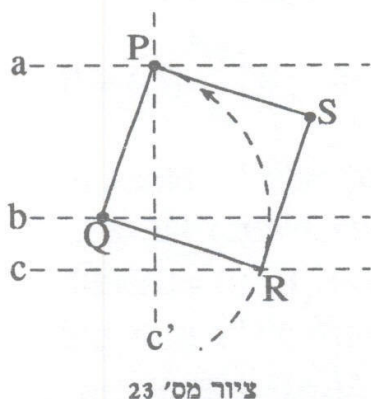
על מישור נתונה נקודה O (מרכז הסיבוב), וזווית (זווית הסיבוב) לטרנספורמציה של צורה F לצורה F' , כאשר כל נקודה X של F עוברת לנקודה X' של F' באופן ש- $OX=OX'$ וגם $\angle X'OX=\alpha$

קוראים סיבוב בזווית α סביב ל-O ומסמנים ב- $F' = R_0^\alpha(F)$, $X' = R_0^\alpha(X)$

הערה: שיקוף ביחס לנקודה הוא מקרה פרטי של סיבוב בזווית של 180° .

תכונות הסיבוב:

- א. סיבוב מעביר קטע לקטע שווה.
 ב. סיבוב מעביר מעגל למעגל שווה.
 ג. סיבוב מעביר ישר ℓ לישר ℓ' באופן שהזווית בין ℓ ל- ℓ' היא זווית הסיבוב α .



4.1 בעיה

לבנות ריבוע, בצורה ששלושה מקדקודיו יהיו על שלושה ישרים מקבילים a, b, c נתונים.

ניתוח הבעיה:

נגיח, כי PQR הוא הריבוע המבוקש כפי שנראה בציור מס' 23. בסיבוב סביב נקודה Q בזווית של 90° עוברת הנקודה R ל-P והישר

c עובר לישר c' המאונך ל-c והעובר דרך הנקודה P. הנקודה P היא נקודת החיתוך של a ו-c'. עם

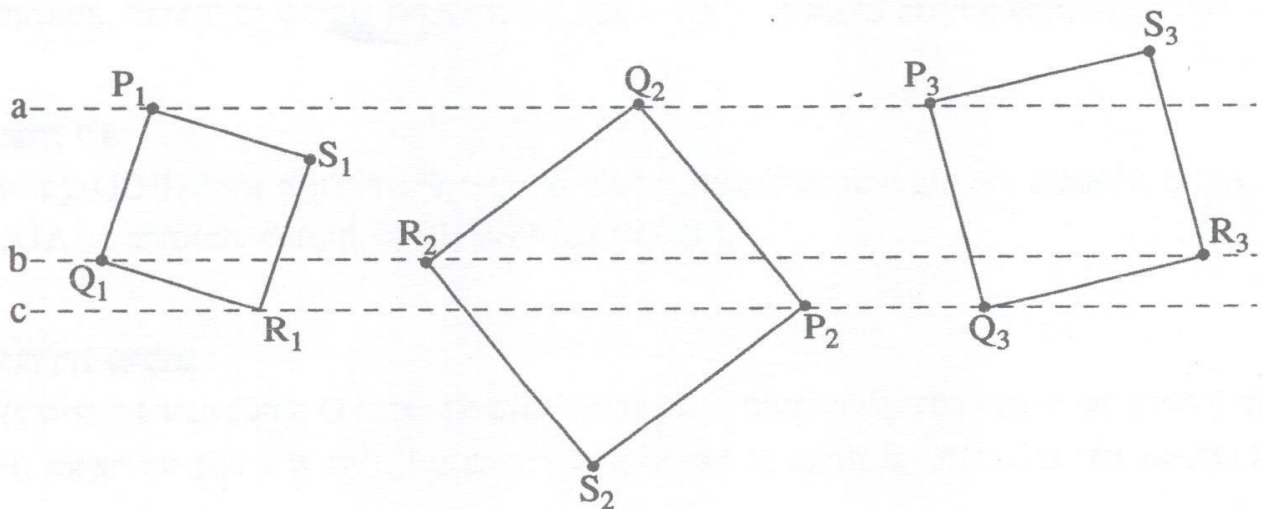
מציאת הנקודה P נקבע הקטע PQ, וזה מספיק לבניית כל הריבוע.

תיאור הבנייה:

בוחרים על ישר b נקודה Q כלשהי. מבצעים סיבוב של ישר c בזווית של 90° סביב הנקודה Q נסמן ב-P את נקודת החיתוך של ישר a ותמונת הישר c (ישר c'). עם קביעת הצלע PQ בונים ריבוע.

חקירה:

לבעיה יש שלושה פתרונות שונים בהתאם לבחירת נקודה Q על כל אחד מהישרים a, b ו-c - כנראה בציור מס' 24.



ציור מס' 24

בעיה 4.2

הנקודה E היא נקודה כלשהי על צלע CD של ריבוע ABCD. חוצה הזווית BAE חותך את הצלע BC בנקודה F. להוכיח כי $AE = ED + BF$.

הוכחה:

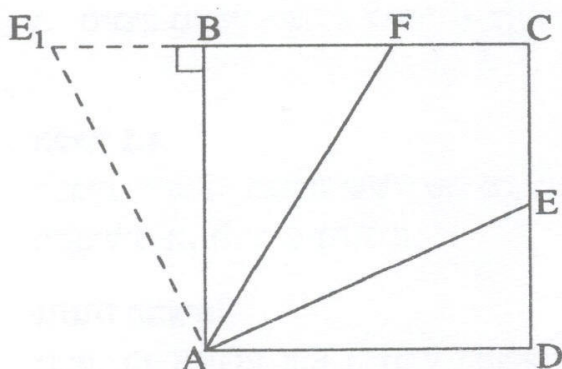
נבצע סיבוב בזווית של 90° סביב נקודה A. פעולת הסיבוב מעבירה את הנקודות כדלקמן:

$$R_A^{90^\circ}(E) = E_1, R_A^{90^\circ}(D) = B$$

E_1 נמצאת על הישר BC (ציור מס' 25).

$DE = BE_1$ (פעולת הסיבוב היא איזומטרית), לכן, $E_1F = E_1B + BF = DE + BF$ היות ופעולת הסיבוב שומרת גם על הזווית, לכן, $\angle E_1AB = \angle EAD$. לפי הנתון $\angle BAF = \angle FAE$, לכן $\angle E_1AF = \angle FAD$. מ- $BC \parallel AD$ נובע ש- $\angle FAD = \angle BFA$, לכן

$$\angle E_1AF = \angle E_1FA \text{ מסדרת השוויונים מקבלים, } AE = AE_1 = E_1F = DE + BF, \text{ מ.ש.ל.}$$

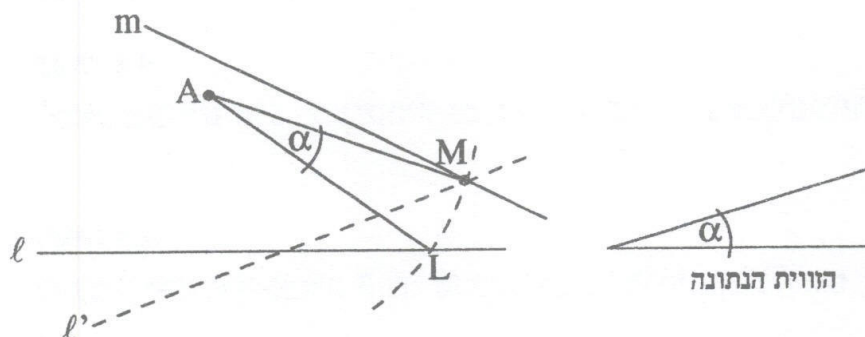


ציור מס' 25

שתי הוכחות נוספות לבעיה, האחת בעזרת טריגונומטריה, והשנייה – על סמך חוצה הזווית ושימוש בפרופורציה הוצגו במאמר קודם⁽²⁾.

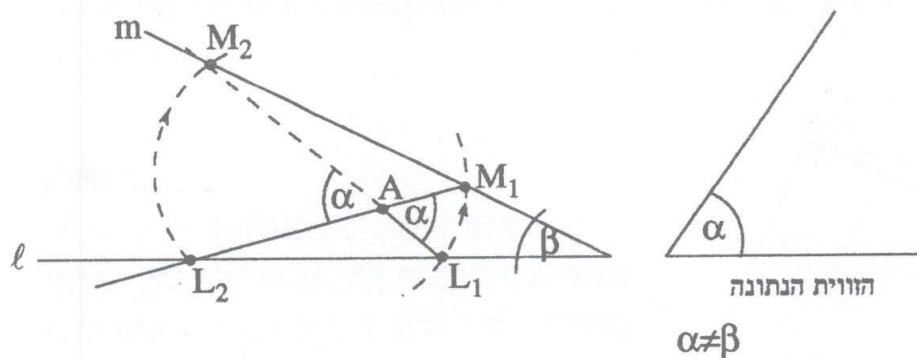
בעיה 4.3

נתונים שני ישרים ℓ ו- m , נקודה A וזווית α . לבנות מעגל, שמרכזו A החותך את הישרים ℓ ו- m בנקודות L ו- M בהתאמה באופן ש- $\angle LAM = \alpha$.



ציור מס' 26

נעשה סיבוב בזווית α של הישר ℓ סביב נקודה A . נסמן ב- M את נקודת החיתוך של הישרים m ו- ℓ' , שהוא תמונת הישר ℓ .



ציור מס' 27

מעגל (A, AM) חותך את הישר ℓ בנקודה L , שהיא המקור של הנקודה

$$(R_A^\alpha(L) = M)M$$

זאת אומרת, כי $\angle LAM = \alpha$ – כנראה בציור מס' 26.

חקירת הבעיה:

אם הזווית בין הישרים m ו- ℓ שונה מ- α , אזי לבעיה ישנם שני פתרונות בהתאם לכיווני הסיבוב כנראה

בציור מס' 27. אם הזווית בין הישרים

שווה ל- α אזי לבעיה פתרון

יחיד כנראה בציור מס' 28.

כאשר הזווית בין הישרים שווה

ל- α וגם $\alpha = 90^\circ$, אזי לבעיה

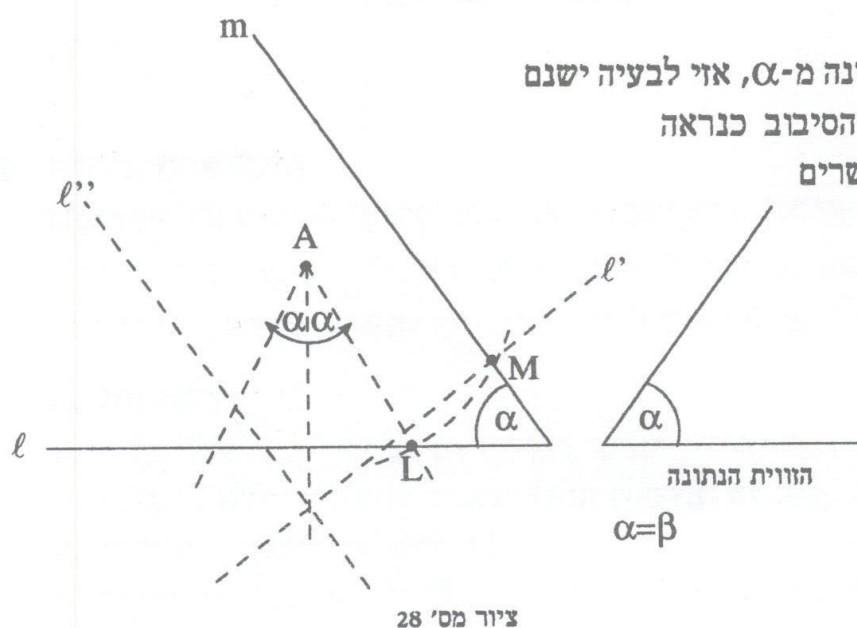
יש שני פתרונות כאשר

הנקודה A נמצאת על חוצה

הזווית של הישרים ואין פתרון

כשהנקודה A אינה נמצאת על

חוצה הזווית.



ציור מס' 28

הערה: הישר המסובב ℓ מקביל ל- m ועל-כן אינו חותך אותו.

בעיות למיתרון עצמי

בעיה 4.4

לבנות משולש ש"צ, שקדקודיו נמצאים על שלושה מעגלים נתונים בעלי מרכז משותף.

בעיה 4.5

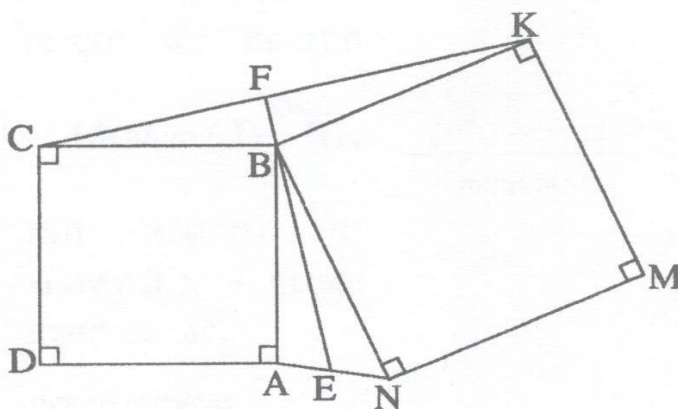
להעביר ישר דרך נקודה P כך שהקטע הנוצר מהחיתוך שלו עם שני מעגלים נתונים ייחצה בנקודה P .

בעיה 4.6

לבנות משולש ש"צ כשנתון הקדקוד A ושני הקדקודים האחרים שלו על שני ישרים מקבילים נתונים.

בעיה 4.7

ABCD ו-BKMN הם שני ריבועים בעלי קדקוד משותף, ו- BE תיכון במשולש ABN (ציור מס' 29). להוכיח, שהמשכו של BE הוא גובה במשולש CBK .
הערה: פתרון הבעיה על-ידי שימוש בסיבוב ועל-ידי בנייה חלופית מופיע במקור² (בעיה מס' 3).



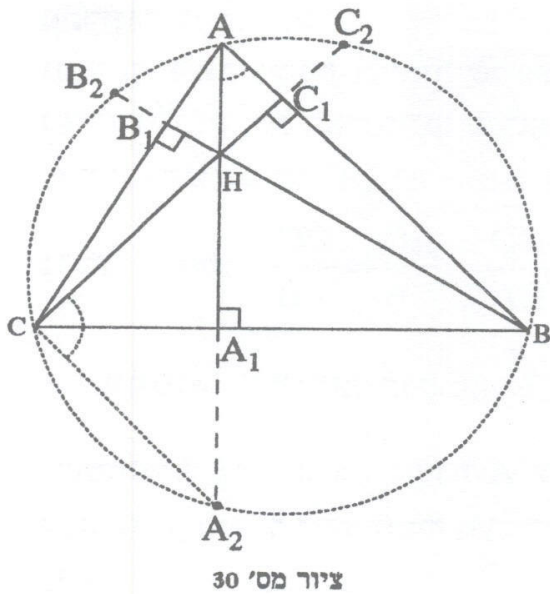
ציור מס' 29

5. הגדרת הומוטתיה

הומוטתיה עם מרכז O ומקדם $k \neq 0$ היא טרנספורמציה, המתאימה לכל נקודה X את נקודה X' על הישר OX באופן ש- $OX' = k \cdot OX$. הנקודות X ו- X' נמצאות על אותו צד של הישר ביחס לנקודה O , כאשר $k > 0$ ונמצאות משני צדי O כאשר $k < 0$.

תכונות ההומוטתיה

- ההומוטתיה מעבירה קטע נתון לקטע המקביל לו או לקטע הנמצא על הישר שנמצא עליו הקטע המקורי. אורכו של קטע התמונה שווה למכפלה של אורך הקטע המקורי ב- $|k|$.
- הומוטתיה שומרת על גודל הזווית.
- הומוטתיה מעבירה ישר לשיר מקביל (אם הוא לא עובר דרך מרכז ההומוטתיה O) או לישר,



המתלכד עם הישר המקורי (אם הוא עובר דרך O).

מסקנה:

הומוטטיה מעבירה כל צורה לצורה הדומה לה עם מקדם הדמיון השווה ל- $|kl|$.

בעיה 5.1

נתונים AA_1, BB_1, CC_1 - שלושת הגבהים במשולש חד-זווית ABC. להוכיח, כי רדיוס המעגל, החוסם את המשולש $A_1B_1C_1$ הוא מחצית רדיוס המעגל, החוסם את משולש ABC (ציור מס' 30).

פתרון:

נמשיך את גבהי המשולש עד חיתוכם על המעגל בנקודות A_2, B_2, C_2 . תהיה הנקודה H נקודת פגישת הגבהים. נוכח, כי $HA_2 = 2HA$. ממשולשים AA_1B ו- CC_1B מקבלים,

ש- $\angle C_1CB = \angle BAA_1 = 90^\circ - \angle ABA_1$. הזוויות

$\angle A_2CB = \angle BAA_1$ שוות בשל היותן זוויות היקפיות, הנשענות על הקשת A_2B . מכאן נובע, ש-

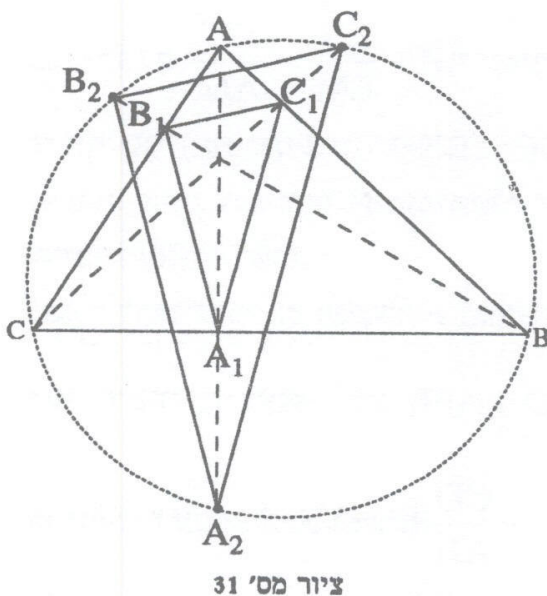
$\angle A_2CA_1 = \angle HCA_1$. בהתחשב בעובדה ש- $HA_1 \perp CB$ נובע, שמשולש A_2CH הוא משולש ש"ש

ו- $HA_2 = 2HA_1$, כלומר, $HA_1 = A_1A_2$.

באותה הדרך אפשר להוכיח, כי גם $HC_2 = 2HC_1$ ו-

$HB_2 = 2HB_1$. המשמעות היא, שמשולש $A_2B_2C_2$ הומוטטי למשולש $A_1B_1C_1$ עם מרכז H ומקדם 2 -

כמתואר בציור מס' 31.



$$\text{לכן, } R_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} R_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} R_{\Delta ABC}$$

הערה: כהכנה לבעיה הנ"ל - ניתן לבקש להוכיח דמיון

בין שלושת המשולשים: AB_1C_1 , CB_1A_1 ו- BA_1C_1 וכי הם דומים למשולש המקורי ABC.

בעיה 5.2

להוכיח, כי ישר המחבר את אמצעי הטרפז, עובר דרך נקודת החיתוך של אלכסונו ודרך נקודת החיתוך של המשכי שוקיו.

פתרון:

נסמן ב-E את נקודת החיתוך של המשכי השוקיים וב-F את נקודת החיתוך של האלכסונים כנראה בציור מס' 32.

מדמיון המשולשים: $\triangle EAB \approx \triangle EDC$

נובע היחס: $\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, כלומר מדובר פה

בהומותסיה, שמרכזה בנקודה E ועם מקדם $k = \frac{DC}{AB}$.

ההומותסיה מעבירה את נקודה A לנקודה D ואת נקודה B

לנקודה C, כלומר ההומותסיה מעבירה את הבסיס העליון AB של הטרפז לבסיס התחתון של הטרפז CD.

נסמן ב-M את נקודת האמצע של הבסיס העליון AB, וב-N את התמונה שלה על הבסיס התחתון

DC לאחר ביצוע ההומותסיה, ואז $\frac{EN}{FM} = k = \frac{DC}{AB} = \frac{DC}{2AM}$

כמו-כן גם $\frac{EN}{EM} = \frac{DN}{AM}$ (יחסי קטעים במשולשים דומים).

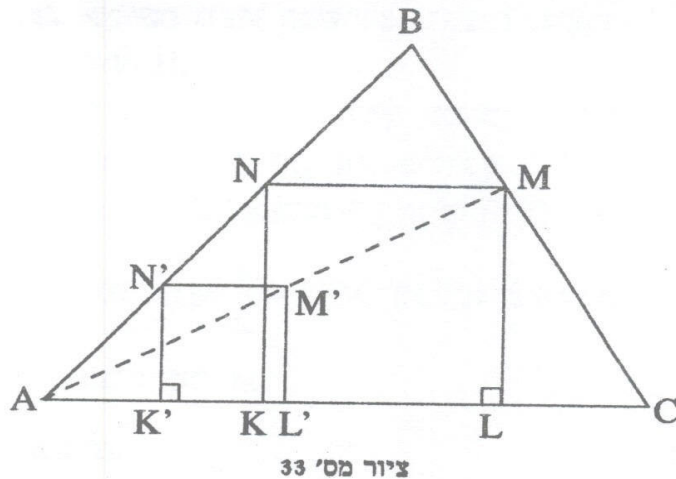
צירוף שני הקשרים נותן ש- $DC=2DN$, זאת אומרת שהנקודה N היא האמצע של הבסיס DC.
(הערה: היות והנקודה N הומותטית לנקודה M עם מרכז הומותסיה E, אז הנקודות N, M ו-E שייכות לאותו ישר).

נשאר להוכיח כי גם הנקודה F נמצאת על הישר EN.

לפי הדמיון בין המשולשים AFB ו-CFD ניתן לרשום את יחס הדמיון $\frac{FC}{FA} = \frac{FD}{FB} = \frac{CD}{AB}$. לכן

הומוטטיה עם מרכז F ומקדם $k' = -\frac{CD}{AB}$ מעבירה את הנקודה A לנקודה C ואת נקודה B לנקודה

D. זאת אומרת, כי הבסיס AB הועבר בפעולת ההומותסיה לבסיס CD באותה הדרך, שהוצגה על העברת הנקודה M לנקודה N על-ידי מרכז ההומותסיה E, אפשר להראות, שהנקודה M עוברת לנקודה N על-ידי פעולת הומותסיה שמרכזו F. לכן הנקודות N, M ו-F נמצאות על ישר אחד. מצירוף שני חלקי ההוכחה נובע, שהנקודות E, M, F, N נמצאות על ישר אחד. מ.ש.ל. פתרון הבעיה בעזרת גיאומטריה קלאסית (תיכונת) ארוכה יותר בהשוואה להוכחה על-ידי שימוש בהומותסיה.



5.3 בעיה

לחסום במשולש ABC כלשהו ריבוע באופן ששניים מקדקודיו נמצאים על הבסיס AC ושני האחרים על הצלעות האחרות (ציור מס' 33).

ניתוח הבעיה:

נבנה, כי הבעיה פתורה, ו-KLMN הוא הריבוע המבוקש כנראה בציור מס' 33. נבצע הומותסיה ממרכז A ומקדם שרירותי $0 < k < 1$. כל ישר, שעובר דרך מרכז ההומותסיה, עובר לעצמו, ולכן ריבוע KLMN יעבור לריבוע $K'L'M'N'$, באופן שהנקודות K' ו-L' נשארות על הישר

AC, נקודה N' על הישר AB ונקודה M' על הישר AM. על-סמך נקודה N', שנמצאת על הצלע AB, ניתן לבנות את הריבוע $K'L'M'N'$. מהעובדה, כי M היא נקודת החיתוך של קרן AM' עם הצלע BC, נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:

בוחרים נקודה שרירותית N' על הצלע AB. מורידים ממנה אנך $N'K'$ לבסיס AC. על הקטע $N'K'$ בונים ריבוע $K'L'M'N'$. דרך הנקודות A ו-M' נעביר ישר, שהמשכו חותך את BC בנקודה M. בונים $MN \parallel AC$ ומורידים מהנקודות M ו-N אנכים לבסיס, ומתקבל הריבוע המבוקש.

הוכחה

נוכיח, כי KLMN הוא ריבוע. במהלך הבנייה ביצענו פעולה הומותסיה עם מרכז A ומקדם $k = \frac{AM}{AM'}$. לפי תכונות ההומותסיה, הריבוע $K'L'M'N'$ עובר לצורה דומה לו, זאת אומרת לריבוע KLMN.

חקירה:

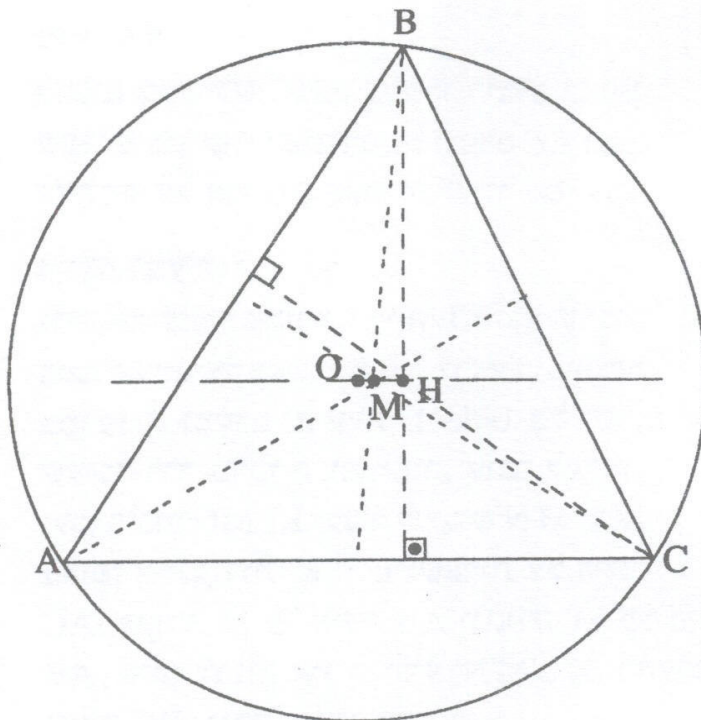
לבעיה יש פתרון יחיד כאשר $90^\circ \leq \angle A$ וגם $90^\circ \leq \angle C$ (להוציא את המקרה הבלתי אפשרי $\angle A = \angle C = 90^\circ$). אם אחת מהזוויות A או C קהה, אז לבעיה אין פתרון.

5.4 בעיה

נתון משולש ABC.

להוכיח:

א. שלושת תיכוני המשולש נפגשים בנקודה אחת M, שמחלקת אותם לשני קטעים, המתיחסים זה לזה ביחס 2:1.



ציור מס' 34

ב. שלושת גובהי המשולש נפגשים בנקודה אחת H.

ג. הישר MH עובר דרך המרכז O של המעגל, החוסם את משולש ABC, הנקודה M נמצאת בין הנקודות O ו-H

וגם $MO = \frac{1}{2}MH$ הבעיה מתוארת

בציור מס' 34.

הוכחה:

סעיף א': נעביר את התיכון AD, ונסמן ב-M את הנקודה, המחלקת את התיכון D ביחס $AM:MD=2:1$, כפי שנראה בציור מס' 35.

הומותסיה עם מרכז M ומקדם $k = -\frac{1}{2}$

מעבירה את נקודה A לנקודה D, ואת קטע

AB לקטע מקביל, שאורכו מחצית מ-AB, זאת אומרת, כי התמונה של AB - אחרי ביצוע ההומותסיה הנ"ל - היא קטע האמצעים DE.

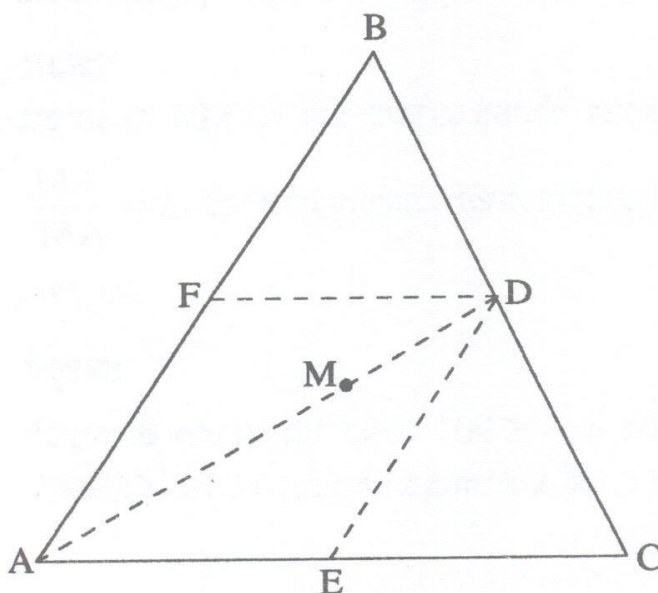
מכאן נובע, שההומותסיה מעבירה את הקדקוד B לנקודה E, שהיא אמצע הצלע AC. לכן נקודה M נמצאת על התיכון BE לצלע AC ו- $BM:ME=2:1$. באותו אופן ההומותסיה מעבירה את הצלע AC לקטע האמצעים DF, ולכן הנקודה M נמצאת על התיכון CF ומחלקת אותו ביחס $CM:MF=2:1$, כלומר שלושת התיכונים עוברים דרך הנקודה M, המחלקת כל אחד מהם ביחס $2:1$.

סעיף ב': ראינו בסעיף הקודם, כי ההומותסיה

עם המרכז M ומקדם $k = -\frac{1}{2}$ מעבירה את

משולש ABC למשולש DEF, שצלעותיו הן

קטעים אמצעיים של משולש ABC (ציור מס' 36). הגובה AP של המשולש ABC עובר על-ידי ההומותסיה לקטע, העובר דרך הנקודה D ומקביל ל-AP (תכונה א' של ההומותסיה), זאת אומרת



ציור מס' 35